אלגברה קומוטטיבית, 88-813

פרופ' ע. וישנה

מועד א', תשע"ו

משך המבחן. שלוש שעות. חומר עזר מותר בשימוש: אין.
ענו על ארבע שאלות. השאלות השונות תקבלנה משקל של 35, 30, 20, 15 נקודות, מן התשובה הטובה ביותר לפחות טובה. סמנו באופן ברור בראש כל עמוד לאיזו שאלה הוא מתייחס. אל תפתרו סעיפים משאלות שונות באותו עמוד.

1. (א) הוכח בקצרה שמודול נוצר סופית מעל חוג נתרי הוא נתרי.
   (ב) הראה שהמודול $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]/\mathbb{Z}$ מעל $\mathbb{Z}$ הוא ארטיני ואינו נתרי[1].
2. הוכח (בראשי פרקים) שממד קרול של חוג מקומי נתרי הוא סופי.
3. הראה שבהרחבה שלמה מתקיימת התכונה GU (הדרכה: העזר בכך שאם בוחרים היטב את חוגי המנה מקבלים הרחבה שלמה[2], ובכך שכל הרחבה שלמה מקיימת את התכונה LO.)
4. (א) יהי F שדה סגור אלגברית. הגדר $\mathcal{I}(S)$ עבור קבוצה S במרחב האפיני F^n.
   (ב) הוכח שאם $S = \{(s_1, \dots, s_n)\}$, קבוצה בת נקודה אחת, אז
   $$\mathcal{I}(S) = \langle \lambda_1 - s_1, \dots, \lambda_n - s_n \rangle.$$
   (ג) עבור $F = \mathbb{C}$ ו־$n = 2$, מצא את החיתוך $\mathcal{I}(\{(i,i)\}) \cap \mathbb{R}[\lambda_1, \lambda_2]$ (כאשר $i = \sqrt{-1}$).
5. (א) מצא תת־אלגברה A_0 של האלגברה האפינית $A = \mathbb{C}[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]/\langle \lambda_1\lambda_2\lambda_3 - 1 \rangle$, כך ש־$A_0$ איזומורפי לחוג פולינומים, ו־A הרחבה שלמה של A_0.
   (ב) מצא שרשרת מקסימלית של ראשוניים ב־A.

בהצלחה.

[1] חוג השלמים $\mathbb{Z}$ נתרי ואינו ארטיני.
[2] את הטענה הזו יש להוכיח, משום שאחרת איך תדעו שבחרתם היטב את המנות.