

## אלגברה קומוטטיבית, 88-813

פרופ' ע. וישנה

מועד א', תשע"ח

ענו על ארבע שאלות. השאלות השונות תקבלנה משקל של 15, 20, 30, 35 נקודות, מן התשובה הטובה ביותר לפחות טובה. סמנו באופן ברור בראש כל עמוד לאיזו שאלה הוא מתייחס. אל תפתרו סעיפים משאלות שונות באותו עמוד.

**משך המבחן.** שלוש שעות. חומר עזר מותר בשימוש: אין.

1. תן דוגמא למודול מעל חוג הפולינומים  $\mathbb{Z}[x, y]$ , עם סדרת הרכב באורך 3. תאר את גורמי ההרכב.

2. (א) תהי  $C \subseteq R$  הרחבה של חוגים קומוטטיביים. אם  $Q \triangleleft R$  אידיאל ראשוני, אז  $Q \cap C \triangleleft C$  אידיאל ראשוני.

(ב) תהי  $C \subseteq R$  הרחבה של אלגברות, כאשר  $R$  אלגברה אפינית. אם  $Q \triangleleft R$  אידיאל מקסימלי, אז  $Q \cap C \triangleleft C$  אידיאל מקסימלי.

3. מצא תת-אלגברה  $C$  של  $R = \mathbb{C}[x^2, x + y, y^2]$  כך שההרחבה  $R/C$  שלמה, ו- $C$  איזומורפית לחוג פולינומים.

4. הוכח (בקיזור) שכל אידיאל מקסימלי של  $\mathbb{C}[x, y, z]$  הוא מהצורה  $\langle x - a, y - b, z - c \rangle$  עבור  $a, b, c \in \mathbb{C}$ . האם  $a, b, c$  יחידים? מצא אידיאל מקסימלי של  $\mathbb{R}[x, y, z]$  שאינו מכיל אפילו פולינום אחד מהצורה  $x - a, y - b$  או  $z - c$  (עבור  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ).

5. נסח את התכונה INC עבור האידיאלים הראשוניים בהרחבה של חוגים  $C \subseteq R$ . הוכח שהרחבה שלמה מקיימת את התכונה הזו.

**בהצלחה.**