

## מבנים אלגבריים 89-214

פרופ' ע. וישנה

מועד א', תשס"ט

ענו על שאלות 1, 2 ו-3, ועל שתיים מבין השאלות 4-7. לכל השאלות ניקוד שווה. אפשר לקנות את ההגדרה של כל מושג המופיע במבחן, פרט לאלו המופיעים בשאלה 1, בשתי נקודות. **משך המבחן.** שעתיים וחצי (לאחר הארכה).  
חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון מדעי וגרפי.

1. דייק וענה בקיצור:

(א) הגדר 'חבורה למחצה'.

(ב) השלם:  $H$  היא חבורה מסדר 48. לכן, לפי משפט קיילי, ...

(ג) שכתב כטענה המתייחסת לאיברים של החבורה  $G$ , שבה  $A, B$  תת-חבורות: " $A = C_G(B)$ " (כלומר,  $A$  הוא המרכז של  $B$ ).

(ד) נסח מחדש במונחים אלמנטריים בלבד (אינך מתבקש להוכיח את הטענה, אלא לתרגם אותה; בתשובה לא יופיעו סימונים המיוחדים לחוגי מנה): " $R = \mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$  בחוג אפס מחלק 6+18 $\mathbb{Z}$ ".

2. תן דוגמא נגדית לשלוש מבין ארבע הטענות (השגויות) הבאות. נמק בקיצור נמרץ מדוע הדוגמא עונה על הדרישות:

(א) שני אברים מאותו סדר בחבורה הם צמודים לזה לזה.

(ב) בכל חבורה לא טריוויאלית יש איבר לא טריוויאלי המתחלף עם כל איבר אחר.

(ג) התמונה של תת-חבורה נורמלית היא נורמלית, כלומר: אם  $\phi: G \rightarrow H$  הומומורפיזם ו- $N \triangleleft G$ , אז  $\phi(N) \triangleleft H$ .

(ד) אם לשתי חבורות אבליות יש אותו סדר ואותו אקספוננט, אז הן איזומורפיות.

3. בכל אחת מן השלוש הבאות יש שתי חבורות איזומורפיות, ואחת יוצאת דופן, שאינה איזומורפית להן. הסבר בקיצור מדוע החבורות בזוג אחד איזומורפיות זו לזו, ומדוע החבורות בזוג אחר אינן איזומורפיות.

$$(א) C = U_{12} \times U_3, B = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, A = U_{15}$$

$$(ב) C = \mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_4, B = \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_8, A = \mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_{12}$$

$$(ג) תת-החבורות  $A = \langle (123), (456) \rangle$ ,  $B = \langle (146)(235), (325) \rangle$  ו-  $C = \langle (246), (145) \rangle$  של  $S_6$ .$$

4. תהי  $N$  תת-חבורה נורמלית בחבורה  $G$ . הוכח שגם  $Z(N) \triangleleft G$ .

5. הוכח שלכל  $n$  איזוגי,  $D_{2n} \cong \mathbb{Z}_2 \times D_n$  (הצעה: הזכר בהגדרה של מכפלה ישרה פנימית).

6. הוכח שכל חוג אוקלידי הוא ראשי.

7. ענה על שניים מתוך שלושת הסעיפים:

(א) הוכח שהחוג  $\mathbb{Z}/49\mathbb{Z}$  אינו איזומורפי לשדה מסדר 49.

(ב) מצא כמה פתרונות יש למשוואה  $x^5 - x$  בשדה מסדר 5 ובשדה מסדר 9.

(ג)  $p$  ראשוני. הוכח שכל פולינום אי-פריק ממעלה 2 מעל  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , מחלק את  $x^{p^2} - x$  (אפשר להשתמש בכך שהשדה מסדר  $p^2$  הוא יחיד).

**בהצלחה.**

$$\text{דף נוסחאות: } \mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} ; D_n = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^n = \tau^2 = 1, \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1} \rangle$$