

מבנים אלגבריים 89-214

פרופ' ע. וישנה

מועד ב', תשס"ט

ענו על שאלות 1, 2 ו-3, ועל שתיים מבין השאלות 4-7. לכל השאלות ניקוד שווה. אפשר לקנות את ההגדרה של כל מושג המופיע במבחן, פרט לאלו המופיעים בשאלה 1, בשתי נקודות. **משך המבחן.** שעתיים וחצי (לאחר הארכה).
חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון מדעי וגרפי.

1. דייק וענה בקיצור:

(א) השלם: H היא תת-חבורה של $G = S_6$, ולכן, לפי משפט לגרנז', ...

(ב) הגדר מהי חבורת אוילר U_n .

(ג) פרש את הטענה " σ " היא מחזור בחבורה " S_n ", בלי להשתמש בסימון המיוחד מהצורה (123).

(ד) נסח מחדש במונחים אלמנטריים (אינך מתבקש להוכיח את הטענה, אלא לתרגם אותה): האיבר 3 הוא אי-פריק בחוג $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}] = \{n + m\sqrt{-6} : n, m \in \mathbb{Z}\}$ אבל אינו ראשוני שם.

2. תן דוגמא נגדית לשלוש מבין ארבע הטענות (השגויות) הבאות. נמק בקיצור נמרץ מדוע הדוגמא עונה על הדרישות:

(א) כל תת-חבורה קומוטטיבית של חבורה G היא נורמלית.

(ב) כל שתי תמורות מאותו סדר, צמודות זו לזו.

(ג) אם A, B חבורות אבליות מסדר 32 ו- $A^4 \cong B^4$, אז $A \cong B$ (הערה: $H^4 = \{x^4 : x \in H\}$).

(ד) אם שני אברים בחבורה מתחלפים, אז אחד מהם הוא חזקה של השני.

3. בכל אחת מן השלוש הבאות יש שתי חבורות איזומורפיות, ואחת יוצאת דופן, שאינה איזומורפית להן. הסבר בקיצור מדוע החבורות בזוג אחד איזומורפיות זו לזו, ומדוע החבורות בזוג אחר אינן איזומורפיות.

(א) $C = U_{30}, B = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2, A = D_4$

(ב) $V = \mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_{45}, Y = \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{15}, X = \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_{30}$

(ג) $A_5, A_4 \times \mathbb{Z}_5$, ותת-החבורה $\langle (123), (124), (56789) \rangle$ של S_9 .

4. הוכח שאם $G/Z(G)$ היא חבורה ציקלית, אז G אבלית.

5. הוכח את 'משפט N/C ': תהי $A \leq G$ תת-חבורה. הוכח שקיים הומומורפיזם חד-חד-ערכי של $N_G(A)/C_G(A)$ לתוך $\text{Aut}(A)$, כאשר $N_G(A)$ הוא המנרמל ו- $C_G(A)$ הוא המרכז של A .

6. (א) הוכח שכל איבר ראשוני בתחום שלמות הוא אי-פריק.

(ב) הוכח שבתחום ראשי, כל איבר אי-פריק הוא ראשוני.

7. ענה על שניים מתוך שלושת הסעיפים:

(א) הוכח שהחוג $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \right\}$ אינו איזומורפי לשדה מסדר 25.

(ב) נסמן ב- \mathbb{F}_8 את השדה מסדר 8. כתוב כסכום ישר של חבורות ציקליות, עד-כדי איזומורפיזם, את החבורות $(\mathbb{F}_8, +, 0)$ ו- $(\mathbb{F}_8 - \{0\}, \cdot, 1)$.

(ג) פרק לגורמים אי-פריקים מעל $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ את הפולינום $x^9 - x$.

בהצלחה.

דף נוסחאות: $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} ; D_n = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^n = \tau^2 = 1, \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1} \rangle$