מבנים אלגבריים 89-214

פרופ' ע. וישנה

מועד א', תש"ע

ענו על ארבע מתוך שש השאלות. בשאלות 1 ו־2 אין קשר בין הסעיפים.
סמנו באופן ברור בראש כל עמוד לאיזו שאלה הוא מתייחס. אל תפתרו סעיפים משאלות שונות באותו עמוד.
משך המבחן. שעתיים וחצי (לאחר הארכה).
חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון מדעי וגרפי.

1. תן דוגמא נגדית לשלוש הטענות (השגויות) הבאות. נמק בקיצור נמרץ מדוע הדוגמא עונה על הדרישות. התשובה חייבת לפתוח בתאור תמציתי של הדוגמא הנגדית, מוקף במסגרת.

   (א) כל שני אברים מסדר 4 בחבורה S_6 צמודים זה לזה.

   (ב) אם $G = AB$ היא מכפלה של שתי תת־חבורות אבליות אז G אבלית.

   (ג) אם לפולינום אין שורשים מעל שדה F, אז הוא אי־פריק שם.

2. בכל סעיף, קבע האם החבורות איזומורפיות או שאינן איזומורפיות, והוכח את טענתך. על התשובה לפתוח במלים 'החבורות איזומורפיות' או 'החבורות לא איזומורפיות'.

   (א) החבורה $(\mathbb{F}_8, +)$ (היינו, השדה בן 8 האיברים, ביחס לפעולת החיבור), והחבורה $(\mathbb{F}_9^\times, \cdot)$ (האיברים השונים מאפס בשדה בגודל 9, ביחס לכפל).

   (ב) $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ ותת־החבורה הנוצרת על־ידי האברים $(2, 20)$ ו־$(9, 10)$ של $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{40}$.

3. כתוב את כל החבורות האבליות מסדר 360 שאין להן איבר מסדר 9. הוכח שהחבורות ברשימה אינן איזומורפיות זו לזו.

4. (א) הגדר מחלקת צמידות בחבורה G.

   (ב) הוכח שמספר האיברים במחלקת צמידות מחלק את סדר החבורה.

5. כמה אפימורפיזמים (הומומורפיזמים על) יש מהחוג $\mathbb{Z}[x]$ אל $\mathbb{Z}_3$? בחר אחד מהם, וחשב את הגרעין שלו. האם הגרעין אידיאל ראשוני? האם הוא מקסימלי?

6. חשב את מכפלתם של כל הפולינומים המתוקנים האי־פריקים ממעלה 2 מעל $\mathbb{Z}_3$.

בהצלחה.

מבנים אלגבריים 89-214

פרופ' ע. וישנה

מועד א', תש"ע - פתרון

ענו על ארבע מתוך שש השאלות. בשאלות 1 ו־2 אין קשר בין הסעיפים.
סמנו באופן ברור בראש כל עמוד לאיזו שאלה הוא מתייחס. אל תפתרו סעיפים משאלות שונות באותו עמוד.
משך המבחן. שעתיים וחצי (לאחר הארכה).
חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון מדעי וגרפי.

1. תן דוגמא נגדית לשלוש הטענות (השגויות) הבאות. נמק בקיצור נמרץ מדוע הדוגמא עונה על הדרישות. התשובה חייבת לפתוח בתאור תמציתי של הדוגמא הנגדית, מוקף במסגרת.

(א) כל שני אברים מסדר 4 בחבורה S_6 צמודים זה לזה. **פתרון**. אברים של S_6 צמודים זה לזה אם ורק אם יש להם אותו מבנה מחזורים. הסדר של מכפלת מחזורים זרים שווה לכפולה המשותפת המינימלית של אורכי המחזורים. לכן $(1234),(1234)(56)$ הם אברים מסדר 4 שאינם צמודים. [הטענה "a,b לא צמודים כי קיים x כך ש־ $b \neq xax^{-1}$" אינה נכונה.]

(ב) אם $G = AB$ היא מכפלה של שתי תת־חבורות אבליות אז G אבלית. **פתרון**. המשימה היא לאתר חבורה לא אבלית השווה למכפלה של שתי תת־חבורות אבליות שלה. לדוגמא, $S_3 = \langle(12)\rangle\langle(123)\rangle$. [שימו לב ש־$\langle(13)\rangle\langle(12)\rangle$ אינה חבורה, ולכן אינה עונה לשאלה. פתרון לשאלה כזו חייב לתאר זוג תת־חבורות של חבורה משותפת; הרי המכפלה של אברים בחבורות שונות, זה בזה, אינה מוגדרת. יתרה מזו, המכפלה הישרה של שתי חבורות אבליות אינה אבלית, ולכן התשובה מוכרחה לכלול מכפלה פנימית שאינה ישרה.]

(ג) אם לפולינום אין שורשים מעל שדה F, אז הוא אי־פריק שם. **פתרון**. כאן צריך כמובן לבחור גם את הפולינום וגם את השדה. $(x^2+1)^2$ פריק וחסר שורשים מעל $\mathbb{Q}$.

2. בכל סעיף, קבע האם החבורות איזומורפיות או שאינן איזומורפיות, והוכח את טענתך. על התשובה לפתוח במלים 'החבורות איזומורפיות' או 'החבורות לא איזומורפיות'.

(א) החבורה $(\mathbb{F}_8,+)$ (היינו, השדה בן 8 האיברים, ביחס לפעולת החיבור), והחבורה $(\mathbb{F}_9^\times,\cdot)$ (האיברים השונים מאפס בשדה בגודל 9, ביחס לכפל). **פתרון**. החבורה $\mathbb{F}_8$ מאקספוננט 2 כי זה המאפיין של השדה, ואילו $\mathbb{F}_9^\times$ מאקספוננט 8 משום שהיא ציקלית, ככל חבורה כפלית של שדה סופי. [מה לא נכון: "נגדיר איזומורפיזם $\phi\colon\mathbb{F}_8^+\to\mathbb{F}_9^\times$ לפי $a_i \mapsto b_i$" (?). $\mathbb{F}_9^\times \cong U_9$. $\mathbb{F}_8 \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. $\mathbb{F}_9^\times$ הוא שדה מסדר 8. $\mathbb{F}_9^\times$ הוא שדה מסדר 9. בחבורה $\mathbb{F}_9^\times$ יש איבר מסדר 3.]

(ב) $\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_4$ ותת־החבורה הנוצרת על־ידי האברים $(2,20)$ ו־$(9,10)$ של $\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_{40}$. **פתרון**. תת־החבורה של $\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_{40}$ הנוצרת על־ידי $(9,10),(2,20)$ כוללת את האיבר $(1,10) = (9,10)-4(2,20)$, ומאידך $(2,20) = 2(1,10)$ ו־ $(9,10) = 9(1,10)$ (הכפל nx הוא פעולת החזקה בחבורה הזו). לכן זוהי חבורה ציקלית, שסדרה סדר האיבר, 12. גם $\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_{12}$ משום ש־$3,4$ זרים, ולכן החבורות איזומורפיות. [מה לא נכון: $\langle a,b\rangle = \langle a\rangle\cup\langle b\rangle$; $|\langle a,b\rangle| = |\langle a\rangle|\cdot|\langle b\rangle|$.]

3. כתוב את כל החבורות האבליות מסדר 360 שאין להן איבר מסדר 9. הוכח שהחבורות ברשימה אינן איזומורפיות זו לזו. **פתרון**. $360 = 2^3\cdot 3^2\cdot 5$, ולכן כל חבורה אבלית מסדר 360 איזומורפית לכפלה של חבורות אבליות מסדר $2^3, 3^2$ ו־5. יש שתי חבורות אבליות מסדר 9, $\mathbb{Z}_9$ ו־$\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$; אבל בראשונה יש איבר מסדר 9, ולכן החבורה שלנו אינה כוללת אותה כתת־חבורה. זה מותיר את החבורות $A\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_5$ כאשר A אבלית מסדר 8, כלומר את

$$\mathbb{Z}_8\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_{120},$$

$$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_6\times\mathbb{Z}_{60},$$

$$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_6\times\mathbb{Z}_{30}.$$

חבורות אלה אינן איזומורפיות זו לזו כי האקספוננטים שלהן - $120, 60, 30$ - שונים, ואין בהן איבר מסדר 9 משום שהאקספוננטים אינם מתחלקים ב־9. [מה לא נכון: "לאחר שהוכחנו ש־ $A \ncong B$ ו־ $B \ncong C$, אין יותר צורך להוכיח

ש־ $A \not\cong C$". "לפי משפט קושי על הראשוני 9, בכל חבורה מסדר המתחלק ב־9 יש איבר מסדר כזה". הטענה "$A \times \mathbb{Z}_4 \not\cong A \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ כי $\mathbb{Z}_4 \not\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$" נכונה, אבל ההוכחה שלה קשה למדי, ואינה בהישג ידו של מי שהידע שלו בתורת החבורות מסתכם בחומר שלמדנו בקורס.]

4. (א) הגדר מחלקת צמידות בחבורה G. **פתרון**. מחלקת הצמידות של איבר g בחבורה G הוא קבוצת האיברים $[g] = \{xgx^{-1} :\ x \in G\}$. [לא נכון: $[g] = \{x :\ xgx^{-1} \in G\}$, "כל האיברים שצמודים לכל איברי G", $[g] = \{x :\ xgx^{-1} = g\}$ (זהו המרכֵּז של x)]

   (ב) הוכח שמספר האיברים במחלקת צמידות מחלק את סדר החבורה. **פתרון**. נגדיר פונקציה $f : G/\mathrm{C}_G(g) \to [g]$ לפי $f(x) = xgx^{-1}$. הפונקציה מוגדרת היטב (יש להוכיח), חד־חד־ערכית (כנ"ל) ועל לפי ההגדרה, לכן $[G : \mathrm{C}_G(g)] = |[g]|$, המחלק את $|G|$. [ϕ אינו 'הומומורפיזם' – הוא מעתיק קבוצה שאינה חבורה לקבוצה שאינה חבורה.]

5. כמה אפימורפיזמים (הומומורפיזמים על) יש מהחוג $\mathbb{Z}[x]$ אל $\mathbb{Z}_3$? בחר אחד מהם, וחשב את הגרעין שלו. האם הגרעין אידיאל ראשוני? האם הוא מקסימלי? **פתרון**. מכיוון שאפימורפיזם מעביר את איבר היחידה לאיבר היחידה, הוא מוגדר על־ידי תמונת היוצר x, וכל תמונה כזו מגדירה אפימורפיזם. לכן יש בדיוק שלושה אפימורמיפזמים. הגרעין של האפימורפיזם המוגדר על־ידי $\phi(f(x)) = f(a)$ הוא $\langle x - a \rangle$. הוא מקסימלי ולכן גם ראשוני, משום שהמנה ביחס אליו איזומורפית לשדה $\mathbb{Z}_3$. [לא נכון שיש אינסוף אפימורפיזמים.]

6. חשב את מכפלתם של כל הפולינומים המתוקנים האי־פריקים ממעלה 2 מעל $\mathbb{Z}_3$. **פתרון**. פתרון ראשון: פולינום ממעלה 2 הוא אי־פריק אם ורק אם אין לו שורשים; אם הפולינום הוא $f(x) = x^2 + ax + b$, האילוצים הם $f(0) = b \neq 0$, $f(1) = a + b + 1 \neq 0$ ו־ $f(-1) = 1 - a + b \neq 0$; נותרים הפולינומים $x^2 + 1, x^2 \pm x - 1$, שמכפלתם $x^6 + x^4 + x^2 + 1 = (x^2+1)(x^4+x^2+1)$. פתרון שני: שדה הפיצול של פולינום אי־פריק ממעלה שניה מעל $\mathbb{F}_3$ הוא $\mathbb{F}_9$, ומכפלת הגורמים הליניאריים $x - \alpha$ עבור $\alpha \in \mathbb{F}_9$ היא $x^9 - x$. לכן הפולינום מחלק את $x^9 - x$. מאותה סיבה כל פולינום ריבועי אי־פריק זר ל־ $x^3 - x$, ולכן מכפלת כל הפולינומים האי־פריקים ממעלה 2 היא $x^6 + x^4 + x^2 + 1 = \frac{x^8-1}{x^2-1} = \frac{x^9-x}{x^3-x}$. [לא נכון שפולינום הוא אי־פריק "אם ורק אם הדיסקרימיננטה שלו שלילית"; בשדה סופי אין יחס סדר, ולכן אין לתנאי הזה משמעות.]