

## מבנים אלגבריים 89-214

פרופ' ע. וישנה

מועד ב', תש"ע

ענו על ארבע מתוך שש השאלות. בשאלות 1 ו-2 אין קשר בין הסעיפים. סמנו באופן ברור בראש כל עמוד לאיזו שאלה הוא מתייחס. אל תפתרו סעיפים משאלות שונות באותו עמוד. **משך המבחן.** שעתיים וחצי (לאחר הארכה).  
חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון מדעי וגרפי.

1. תן דוגמא נגדית לשלוש הטענות (השגויות) הבאות. נמק בקיצור נמרץ מדוע הדוגמא עונה על הדרישות. התשובה חייבת לפתוח בתאור תמציתי של הדוגמא הנגדית, מוקף במסגרת.

(א) מונויד קומוטטיבי עם צמצום משמאל הוא חבורה.

(ב) בכל חבורה מסדר 24 יש איבר מסדר 4.

(ג) חוג המנה של תחום שלמות (ביחס לאידיאל לא טריוויאלי) הוא תמיד תחום שלמות.

2. בכל סעיף, קבע האם החבורות איזומורפיות או שאינן איזומורפיות, והוכח את טענתך. על התשובה לפתוח במלים 'החבורות איזומורפיות' או 'החבורות לא איזומורפיות'.

(א) כל החבורות האבליות מסדר 104.

(ב)  $A_5$  ו- $\mathbb{Z}_5 \times A_4$ .

3. תהי  $G$  חבורה מסדר אי-זוגי, ויהי  $a \in G$  איבר בה.

(א) הוכח שקיים איבר  $x \in G$  כך ש- $x^2 = a$ .

(ב) הוכח שאם  $G$  אבלית, אז  $x$  כנ"ל הוא יחיד. [הטענה נכונה לכל  $G$  מסדר אי-זוגי]

4. נסח והוכח את משפט קיילי.

5. (א) הגדר תחום אוקלידי.

(ב) אם  $a \in D$ ,  $a \neq 0$  איבר בתחום אוקלידי כך ש- $d(a^7) = d(a^4)$ , הוכח ש- $a$  הפיך.

6. בנה במפורש שדה מסדר 9.

**בהצלחה.**