מבנים אלגבריים 89-214

פרופ' ע. וישנה

מועד ב', תשע"א - **פתרון**

ענו על ארבע מתוך שש השאלות. בשאלות 1 ו־2 אין קשר בין הסעיפים.
סמנו באופן ברור בראש כל עמוד לאיזו שאלה הוא מתייחס. אל תפתרו סעיפים משאלות שונות באותו עמוד.
משך המבחן. שעתיים וחצי (לאחר הארכה).
חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון מדעי וגרפי.

1. תן דוגמאות:

(א) לחבורה לא־אבלית אינסופית. **פתרון**. $\mathbb{Z}\times S_3$ אינה אבלית כי S_3 שאינה אבלית היא תת־חבורה שלה. **פתרונות אפשריים נוספים**. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, $S_3\times S_3\times\cdots$. **פתרונות לא מוצלחים**. "מטריצות 2×2 ביחס לכפל" - אוסף המטריצות אינו חבורה. "מטריצות 2×2 מעל השדה $\mathbb{Z}$" - $\mathbb{Z}$, כידוע, אינו שדה. "$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$" אינו דוגמא אלא משפחה של דוגמאות, שאחת מהן ($n=1$) אינה מתאימה לשאלה.

(ב) לתמורה ב־S_7 שאין שום דרך להציג כמכפלה של מחזורים באורך 3. **פתרון**. $(12)\notin A_7$ ולכן אינה יכולה להיות מכפלה של מחזורים באורך 3, שכולם שייכים ל־A_7. **הערות**. לאף פתרון המבוסס על מספר נקודות השבת או על הסדר של התמורה אין סיכוי, משום ש־S_n נוצרת, למשל, על־ידי המחזורים באורך n. לגבי ההצעה הפופולרית (1234567), שימו לב ש־$(567)(345)(123)=(1234567)$.

(ג) לחבורה G כך שכל הומומורפיזם לא טריוויאלי $G\to G$ הוא אוטומורפיזם. **פתרון**. $\mathbb{Z}_2$, משום שכל הומומורפיזם לא טריוויאלי שולח את האיבר שאינו יחידה לעצמו. **פתרונות נוספים**. כל חבורה פשוטה, כמו $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_p$ עבור p ראשוני, A_5. גם $G=\{1\}$ היא פתרון לגיטימי (אם כי קצת, איך לומר, טריוויאלי).

(ד) לאידיאל לא ראשוני בתחום שלמות שאינו $\mathbb{Z}$. **פתרון**. $\langle x^2\rangle$ הוא אידיאל לא ראשוני בתחום השלמות $\mathbb{Q}[x]$, משום ש־x מחלק אפס בחוג המנה. **פתרונות שגויים**. "$P=4\mathbb{R}$ בחוג $\mathbb{R}$" - כשדה, אין ל־$\mathbb{R}$ אידיאלים לא טריוויאליים, והאידיאל השווה לכל החוג (למרות שאינו אידיאל אמיתי) הוא ראשוני לפי ההגדרה שלנו. את הפתרון $20\mathbb{Z}\lhd 5\mathbb{Z}$ קיבלתי, למרות ש־$5\mathbb{Z}$ אינו חוג עם יחידה.

2. בכל סעיף, קבע האם החבורות איזומורפיות או שאינן איזומורפיות, והוכח את טענתך. על התשובה לפתוח במלים 'החבורות איזומורפיות' או 'החבורות לא איזומורפיות'.

(א) החבורה $V=\left\{\begin{pmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&0\end{pmatrix}:\ a,b,c\in\mathbb{Z}_5\right\}$ עם פעולת החיבור של מטריצות מודולו 5, והחבורה $U=\{I+x:\ x\in V\}$ עם פעולת הכפל של מטריצות מודולו 5 (כאשר I היא מטריצת היחידה בגודל 3×3). **פתרון**. החבורות אינן איזומורפיות משום ש־V אבלית, ואילו U אינה אבלית: $(I+e_{12})(I+e_{23})=I+e_{12}+e_{23}+e_{13}\neq I+e_{12}+e_{23}=(I+e_{23})(I+e_{12})$. **הערה**. הפונקציה $x\mapsto I+x$ אינה איזומורפיזם. מאידך, העובדה הזו כשלעצמה אינה מוכיחה שהחבורות אינן איזומורפיות! שנית, נכון ש־$\exp(U)=\exp(V)=5$; זו לא הוכחה שהחבורות איזומורפיות.

(ב) החבורות $A=\mathbb{Z}_{48}\times\mathbb{Z}_{36}\times\mathbb{Z}_4$ ו־ $B=\mathbb{Z}_{72}\times\mathbb{Z}_{16}\times\mathbb{Z}_6$. **פתרון**. $36A\cong\mathbb{Z}_4$ ואילו $36B\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4$, ולכן החבורות אינן איזומורפיות. **הערות**. מכיוון ש־$\mathbb{Z}_{nm}\cong\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_m$, אפשר להביא את החבורות לצורה $A\cong(\mathbb{Z}_{16}\times\mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_3)\times(\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4)$, $B\cong(\mathbb{Z}_{16}\times\mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_3)\times(\mathbb{Z}_8\times\mathbb{Z}_2)$. נכון ש־$\mathbb{Z}_8\times\mathbb{Z}_2$ אינה איזומורפית ל־$\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4$ (אין להן אותו אקספוננט), אבל זו אינה הוכחה ש־$A\cong B$! מעולם לא הוכחנו שאם $C\times X\cong C\times Y$, אז $X\cong Y$ (למרות שהטענה הזו נכונה לחבורות סופיות). כתחליף לנימוק הזה, אפשר לעשות עוד מאמץ קטן ולהביא את החבורות לצורה הקנונית $A\cong\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_{144}$, $B\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_{24}\times\mathbb{Z}_{144}$; מכיוון שאלו שונות זו מזו, החבורות לא איזומורפיות.

3. (א) תהי $H\leq G$ תת־חבורה. הוכח ש־ $x\mathrm{C}_G(H)x^{-1}=\mathrm{C}_G(xHx^{-1})$ לכל $x\in G$. **פתרון**. לכל $y\in G$, $y\in x\mathrm{C}_G(H)x^{-1}$ אם ורק אם $x^{-1}yx\in\mathrm{C}_G(H)$, אם ורק אם $x^{-1}yxh=hx^{-1}yx$ לכל $h\in H$, אם ורק אם $y(xhx^{-1})=(xhx^{-1})y$ לכל $h\in H$, אם ורק אם $yh'=h'y$ לכל $h'\in xHx^{-1}$.
הערה. כל פתרון המבוסס על מחלקות צמידות הוא שגוי, משום שהוא מבלבל בין הצמדה באיבר קבוע (x) לבין האפשרות להצמיד באיבר כלשהו.

(ב) נניח ש־$H \lhd G$. הוכח שגם $\mathrm{C}_G(H) \lhd G$. **פתרון**. לכל $g \in G$, מסעיף א' נובע ש־ $g\mathrm{C}_G(H)g^{-1} = \mathrm{C}_G(gHg^{-1}) = \mathrm{C}_G(H)$ לפי הנורמליות של H. **שימו לב**. אין שום צורך לחזור על החישובים מסעיף א'.

4. מיין את החבורות האבליות A מסדר $2^5 \cdot 3^5$ כך ש־$\left|A/A^4\right| = 2^4$ ו־$\left|A/A^3\right| = 3^4$. כתוב את הצורה הקנונית של כל חבורה כזו. כמה חבורות כאלה יש, עד־כדי איזומורפיזם? **פתרון**. נפרק למכפלה ישרה פנימית $A = BC$ כאשר $|B| = 2^5$ ו־$|C| = 3^5$. אז $A^4 = B^4 \times C$ ו־$A^3 = BC^3$. לכן האילוצים הם $\left|B^4\right| = 2$, $\left|C^3\right| = 3$. מכאן ש־$B \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8$ או $B \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_8$, ו־$C \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_9$. יש, אם, כך שתי חבורות אפשריות, שהצורות הקנוניות שלהן $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{72}$ ו־$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{72}$.

5. נניח ש־A, B, C תת־חבורות נורמליות של חבורה סופית G, כל ש־$A \subset C$. הוכח ש־

$$[C\!:\!A] = [BC\!:\!BA] \cdot [B \cap C\!:\!B \cap A].$$

פתרון. נסמן $D = C \cap BA = (C \cap B)A$ (השוויון הוא המודולריות של סריג תת־החבורות הנורמליות). ברור ש־$A \subseteq D \subseteq C$, ולכן $[C\!:\!A] = [C\!:\!D][D\!:\!A]$; אבל לפי משפט האיזומורפיזם השני $C/D = C/(C \cap BA) \cong BC/BA$, ו־$D/A = (C \cap B)A/A \cong (C \cap B)/(C \cap A)$.

6. מצא איזומורפיזם מפורש בין שניים מהחוגים הבאים, והסבר מדוע השלישי לא איזומורפי להם: $\mathbb{Z}_{11}[x]/\langle x^2 - 2\rangle$, $\mathbb{Z}_{11}[y]/\langle y^2 - 3\rangle$, $\mathbb{Z}_{11}[z]/\langle z^2 - 5\rangle$. **פתרון**. בדיקת השורשים האפשריים מראה ש־$x^2 - 2$ אינו פריק מעל $\mathbb{Z}_{11}$, בעוד ש־$y^2 - 3 = (y-5)(y+5)$ ו־$z^2 - 5 = (z-4)(z+4)$. לכן החוג הראשון הוא שדה, והאחרים אינם תחומי שלמות. כדי לבנות איזומורפיזם מפורש $\mathbb{Z}_{11}[y]/\langle y^2 - 3\rangle \to \mathbb{Z}_{11}[z]/\langle z^2 - 5\rangle$, עלינו לשלוח $y + \langle y^2 - 3\rangle \mapsto a + bz + \langle z^2 - 5\rangle$; אבל האיבר שמשמאל מקיים $y^2 - 3 \equiv 0$, ולכן גם $0 \equiv (a+bz)^2 - 3 = a^2 + 2abz + b^2z^2 - 3 = (a^2 + 5b^2 - 3) + (2ab)z$. בפרט $ab = 0$, אבל $b \neq 0$ כי על ההומומורפיזם להיות הפיך. נשאר האילוץ $5b^2 = 3$ ב־$\mathbb{Z}_{11}$, שפתרונו $b \equiv \pm 4$. אם כך יש שני איזומורפיזמים, שאחד מהם הוא $f(y) + \langle y^2 - 3\rangle \mapsto f(4z) + \langle z^2 - 5\rangle$. **הערות**. ההעתקה $f(y) + \langle y^2 - 3\rangle \mapsto f(z) + \langle z^2 - 5\rangle$ אינה מוגדרת היטב. לצירופים מוזרים כמו $f(x) + \langle y^2 - 3\rangle \mapsto f(x) + \langle z^2 - 5\rangle$ אין שום מובן בהקשר הזה.