

מבנים אלגבריים 89-214

פרופ' ע. וישנה

מועד ב', תשע"א

ענו על ארבע מתוך שש השאלות. בשאלות 1 ו-2 אין קשר בין הסעיפים. סמנו באופן ברור בראש כל עמוד לאיזו שאלה הוא מתייחס. אל תפתרו סעיפים משאלות שונות באותו עמוד. **משך המבחן.** שעתיים וחצי (לאחר הארכה). חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון מדעי וגרפי.

1. תן דוגמאות:

(א) לחבורה לא-אבלית אינסופית.

(ב) לתמורה ב- S_7 שאין שום דרך להציג כמכפלה של מחזורים באורך 3.

(ג) לחבורה G כך שכל הומומורפיזם לא טריוויאלי $G \rightarrow G$ הוא אוטומורפיזם.

(ד) לאידיאל לא ראשוני בתחום שלמות שאינו \mathbb{Z} .

2. בכל סעיף, קבע האם החבורות איזומורפיות או שאינן איזומורפיות, והוכח את טענתך. על התשובה לפתוח במלים 'החבורות איזומורפיות' או 'החבורות לא איזומורפיות'.

(א) החבורה $V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_5 \right\}$ עם פעולת החיבור של מטריצות מודולו 5,

והחבורה $U = \{I + x : x \in V\}$ עם פעולת הכפל של מטריצות מודולו 5 (כאשר I היא מטריצת היחידה בגודל 3×3).

(ב) החבורות $A = \mathbb{Z}_{48} \times \mathbb{Z}_{36} \times \mathbb{Z}_4$ ו- $B = \mathbb{Z}_{72} \times \mathbb{Z}_{16} \times \mathbb{Z}_6$.

3. (א) תהי $H \leq G$ תת-חבורה. הוכח ש- $C_G(H) = C_G(xHx^{-1})$ לכל $x \in G$.

(ב) נניח ש- $H \triangleleft G$. הוכח שגם $C_G(H) \triangleleft G$.

4. מייך את החבורות האבליות A מסדר $2^5 \cdot 3^5$ כך ש- $|A/A^4| = 2^4$ ו- $|A/A^3| = 3^4$. כתוב את הצורה הקנונית של כל חבורה כזו. כמה חבורות כאלה יש, עד-כדי איזומורפיזם?

5. נניח ש- A, B, C תת-חבורות נורמליות של חבורה סופית G , כל ש- $A \subset C$. הוכח ש-

$$[C : A] = [BC : BA] \cdot [B \cap C : B \cap A].$$

6. מצא איזומורפיזם מפורש בין שניים מהחוגים הבאים, והסבר מדוע השלישי לא איזומורפי להם: $\mathbb{Z}_{11}[x]/\langle x^2 - 2 \rangle$, $\mathbb{Z}_{11}[y]/\langle y^2 - 3 \rangle$, $\mathbb{Z}_{11}[z]/\langle z^2 - 5 \rangle$.

בהצלחה.