מבנים אלגבריים 89-214

פרופ' ע. וישנה

מועד א', תשע"א ־ פתרון

1. תן דוגמאות:

(א) לחבורה אבלית אינסופית. **פתרון**. $\mathbb{Z}$ היא חבורה אבלית אינסופית; גם $\mathbb{Q}$ או $\mathbb{R}$, ביחס לחיבור כמובן.

(ב) לחבורה G, שיש לה תת־חבורה מאינדקס 2 שאינה אבלית. **פתרון**. ל־S_4 יש תת־חבורה מאינדקס 2, A_4, שאינה אבלית כי $(123)(124) = (13)(24) \neq (14)(23) = (124)(123)$. **שימו לב**. בשאלה מבקשים חבורה שיש לה תת־חבורה לא אבלית; S_3 אינה אבלית, אבל תת־החבורה היחידה שלה מאינדקס 2, A_3, כן אבלית.

(ג) לחבורות G, H מאותו סדר > 1, כך שכל הומומורפיזם $G \to H$ הוא טריוויאלי. **פתרון**. $G = A_5$ ו־$H = \mathbb{Z}_{60}$ עוונות על התנאי: אם $\varphi : A_5 \to \mathbb{Z}_{60}$ הומומורפיזם אז הגרעין שלו תת־חבורה נורמלית בחבורה הפשוטה A_5, ולכן הוא 1 או G. המקרה הראשון בלתי אפשרי כי G, H אינן איזומורפיות (H אבלית ו־G לא). **הערה**. הומומורפיזם $\phi : G \to H$ הוא הטלה אל חבורת מנה $G \to G/\operatorname{Ker}(\phi)$, ומשם איזומורפיזם $G/\operatorname{Ker}(\phi) \to \operatorname{Im}(\phi) \leq H$. כדי שלא יהיה קיים אף הומומורפיזם טריוויאלי, דרוש שלא תהיה ל־G חבורת מנה (שאינה $\{1\}$) שהיא איזומורפית לתת־חבורה של H. הדרך הקלה להשיג זאת היא לבחור G פשוטה, שאין לה חבורות מנה לא טריוויאליות, ו־H שאינה איזומורפית ל־G.

(ד) לחוג (קומוטטיבי) R שאינו תחום שלמות, עם אידיאל ראשוני P שאינו מקסימלי. **הערה**. 0 הוא אידיאל ראשוני שאינו מקסימלי בדיוק כאשר החוג הוא תחום־שלמות שאינו שדה. בשאלה מבקשים ש־R לא יהיה תחום שלמות, ולכן יש לסבך מעט את הדוגמא. **פתרון**. למשל $R = \mathbb{Q}[x,y] \times \mathbb{Z}$ עם $P = \langle x \rangle \times \mathbb{Z}$. חוג המנה $R/P \cong \mathbb{Q}[y]$ הוא תחום שלמות שאינו שדה, ולכן האידיאל ראשוני אבל לא מקסימלי.

2. בכל סעיף, קבע האם החבורות איזומורפיות או שאינן איזומורפיות, והוכח את טענתך. על התשובה לפתוח במלים 'החבורות איזומורפיות' או 'החבורות לא איזומורפיות'.

(א) החבורות A^2 ו־B^2 כאשר $A = \mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{36} \times \mathbb{Z}_4$ ו־ $B = \mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_4$. **פתרון**. לכל n, $(\mathbb{Z}_n)^2 \cong \mathbb{Z}_{n/(2,n)}$. לכן $A^2 \cong \mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, בעוד ש־$B^2 \cong \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. החבורות איזומורפיות כי $\mathbb{Z}_{15} \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$.

(ב) המרכֵּז של $(12)(34)$ ב־S_5, ו־$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$. **פתרון**. האברים $(12), (13)(24)$ של המרכֵּז אינם מתחלפים, ולכן זו אינה חבורה אבלית, בעוד ש־$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ כן אבלית. **הערה**. כדי למצוא את המרכֵּז יש לחסום אותו משני הכיוונים: ראשית, במחלקת הצמידות של $(12)(34)$ יש $5 \cdot \binom{4}{2}$ אברים, ולכן המרכֵּז הוא מסדר $8 = \frac{120}{15}$. מצד שני, קל לנחש שהחילופים $(12), (34)$ מתחלפים עם $(12)(34)$, והם יוצרים תת־חבורה מסדר 4. נשאר למצוא איבר אחד נוסף המקיים $\sigma(12)(34) = (12)(34)\sigma$, ואם מוסיפים את האילוץ $\sigma(1) = 3$ מגלים את $\sigma = (1324)$; אכן $\sigma^2 = (12)(34)$. מכאן ש־ $\mathrm{C}_{S_5}((12)(34)) = \langle (12), (34), (13)(24) \rangle$, וחבורה זו איזומופרית ל־D_4 משום ש־$(1324)^{-1} = (12)(1324)(12)^{-1}$.

3. (א) תהי H תת־חבורה של חבורה G. הגדר את המנרמל $\mathrm{N}_G(H)$.

פתרון. $\mathrm{N}_G(H) = \left\{ x \in G : \, xHx^{-1} = H \right\}$. **הערה**. ולא $\left\{ x \in G : \, xHx^{-1} \subseteq H \right\}$, שאינה בהכרח סגורה להיפוך.

(ב) נניח ש־G סופית. הוכח שהאינדקס $[G : \mathrm{N}_G(H)]$ שווה למספר תת־החבורות של G הצמודות ל־H. **פתרון**. בדומה להוכחה שמספר האברים במחלקת הצמידות של x הוא האינדקס של המרכֵּז. נגדיר פונקציה מ־G על אוסף תת־החבורות הצמודות ל־H לפי $f(x) = xHx^{-1}$, ואז $f(x) = f(y)$ אם ורק אם $y^{-1}xH = Hy^{-1}x$ אם ורק אם $y^{-1}x \in \mathrm{N}_G(H)$ אם ורק אם $x \in y\mathrm{N}_G(H)$ אם ורק אם $x\mathrm{N}_G(H) = y\mathrm{N}_G(H)$. לכן מספר תת־החבורות הצמודות שווה למספר הקוסטים השמאליים של $\mathrm{N}_G(H)$.

4. (א) הוכח שהתמורות $(123)(456)$ ו־(246) אינן צמודות ב־S_6. **פתרון**. לכל $\tau \in S_6$ מתקיים $\tau(246)\tau^{-1} = (\tau(2)\,\tau(4)\,\tau(6))$, ותמורה זו אינה יכולה להיות שווה ל־$(123)(456)$ כי אין להן אותו מבנה מחזורים. **הערה**. לפי משפט, תמורות הן צמודות אם ורק אם יש להן אותו מבנה מחזורים. כאן השתמשנו במבנה המחזורים כדי לקבוע שהתמורות שונות, ולא שאינן צמודות זו לזו.

(ב) הראה שהתמורות $\sigma = (123)(456)$ ו־$\sigma' = (123)(654)$ צמודות ב־A_6. **פתרון**. לפי הזהות היסודית של הצמדת תמורות, $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma'$ אם ורק אם τ שומר או מחליף את הקבוצות $\{123\},\{456\}$, ועושה זאת בסדר מסויים. הבעיה כאן היא שכל תמורה המצמידה את (123) לעצמה היא זוגית, וכך גם כל תמורה המצמידה את (456) לעצמו. מכיוון שיש תמורה אי־זוגית, (46), המצמידה את σ ל־σ', והיא תמורה השומרת על הקבוצות, כל תמורה מצמידה השומרת על הקבוצות תהיה אי־זוגית. מאן הפתרון ברור: $(1634)(25) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ זוגית ומתקיים $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma'$.

(ג) האם הן צמודות בתת־החבורה $\langle \sigma, \sigma' \rangle$ של S_6? **פתרון**. נסמן $\alpha = (123)$, $\beta = (456)$, כך ש־$\sigma = \alpha\beta$ ו־$\sigma' = \alpha\beta^{-1}$. אז $\langle \sigma, \sigma' \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$ שהיא חבורה אבלית כי $\alpha\beta = \beta\alpha$. בחבורה אבלית אברים שונים אינם יכולים להיות צמודים.

5. תהי G חבורה.

(א) לכל $x \in G$ נסמן ב־γ_x את הפונקציה $G \to G$ המוגדרת לפי $\gamma_x(y) = xyx^{-1}$. נניח שהמרְכָּז $\mathrm{Z}(G) = 1$ טריוויאלי. הוכח ש־$\Gamma : G \to S_G$ המוגדר לפי $\Gamma(x) = \gamma_x$ הוא שיכון (כלומר, הומומורפיזם חד־חד־ערכי). **פתרון**. חישוב: $\Gamma(xy)(z) = \gamma_{xy}(z) = (xy)z(xy)^{-1} = x(yzy^{-1})x^{-1} = \gamma_x(\gamma_y(z)) = (\gamma_x \circ \gamma_y)(z)$, ולכן $\Gamma(xy) = \Gamma(x) \circ \Gamma(y)$. בנוסף, אם $\Gamma(x) = \gamma_x$ הוא הזהות, אז $xyx^{-1} = y$ לכל y ולכן $x \in \mathrm{Z}(G) = \{1\}$. מכאן ש־$\Gamma$ חד־חד־ערכי.

(ב) נסמן ב־$c_x \in S_G$ את פעולת הכפל משמאל $c_x(y) = xy$. משפט קיילי קובע ש־$C : G \to S_G$ המוגדרת לפי $C(x) = c_x$ היא שיכון.
הוכח שתת־החבורות $\mathrm{Im}(C)$ ו־$\mathrm{Im}(\Gamma)$ של S_G מתחלפות איבר איבר אם ורק אם G אבלית.
פתרון. נסמן את הקומוטטור $[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$. חישוב מראה שלכל $x, y \in G$, $[\gamma_x, c_y](z) = \gamma_x c_y \gamma_x^{-1} c_y^{-1}(z) = xyx^{-1}y^{-1}zxx^{-1} = [x,y]z$, כלומר, γ_x, c_y מתחלפים אם ורק אם x, y מתחלפים. לכן כל γ_x מתחלף עם כל c_y אם ורק אם כל $x \in G$ מתחלף עם כל $y \in G$.

6. בנה שדה מסדר 27. **פתרון**. שדה מסדר 27 הוא מרחב וקטורי תלת־ממדי מעל השדה $\mathbb{Z}_3$. הפולינום $x^3 - x + 1$ אי־פריק כי אין לו שורשים והמעלה שלו ≤ 3. לכן $F = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3 - x + 1 \rangle = \mathbb{Z}_3[x \mid x^3 = x - 1]$ שדה בעל $27 = 3^3$ אברים. **הערה**. יש 8 פולינומים אי־פריקים ממעלה 3. התשובה "שדה קטן ביותר שבו הפולינום $x^{27} - x$ מתפצל" מגדירה אמנם את האובייקט הנכון, אבל אינה קונסטרוקטיבית.
הוכח שלכל איבר בשדה הזה יש שורש שלישי. **פתרון**. לכל $a \in F$ מתקיים $a^{27} = a$ (הרי החבורה הכפלית של השדה היא מסדר 26, ולכן $a^{26} = 1$ לכל $a \neq 0$); מכאן ש־a^9 הוא שורש שלישי של a. **ניסוח אחר**. לאפס יש שורש שלישי כי $0^3 = 0$, ופעולת ההעלאה בשלישית של החבורה $F^\times$, שסדרה 26 זר ל־3, היא חד־חד־ערכית ולכן על. **שימו לב**. היוצר x מקיים את המשוואה $x^3 = x - 1$, ויש לה עוד שני פתרונות (מהם?), אבל זו אינה זהות של השדה.