

מבנים אלגבריים 89-214

פרופ' ע. וישנה

מועד א', תשע"א

ענו על ארבע מתוך שש השאלות. בשאלות 1 ו-2 אין קשר בין הסעיפים. סמנו באופן ברור בראש כל עמוד לאיזו שאלה הוא מתייחס. אל תפתרו סעיפים משאלות שונות באותו עמוד. **משך המבחן.** שעתיים וחצי (לאחר הארכה).
חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון מדעי וגרפי.¹

1. תן דוגמאות:

(א) לחבורה אבלית אינסופית.

(ב) לחבורה G , שיש לה תת-חבורה מאינדקס 2 שאינה אבלית.

(ג) לחבורות G, H מאותו סדר $1 <$, כך שכל הומומורפיזם $G \rightarrow H$ הוא טריוויאלי.

(ד) לחוג (קומוטטיבי) R שאינו תחום שלמות, עם אידיאל ראשוני P שאינו מקסימלי.

2. בכל סעיף, קבע האם החבורות איזומורפיות או שאינן איזומורפיות, והוכח את טענתך. על התשובה לפתוח במלים 'החבורות איזומורפיות' או 'החבורות לא איזומורפיות'.

(א) החבורות A^2 ו- B^2 כאשר $A = \mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{36} \times \mathbb{Z}_4$ ו- $B = \mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_4$.

(ב) המרפז של $(12)(34)$ ב- S_5 , ו- $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$.

3. (א) תהי H תת-חבורה של חבורה G . הגדר את המנרמל $N_G(H)$.

(ב) נניח ש- G סופית. הוכח שהאינדקס $[G:N_G(H)]$ שווה למספר תת-החבורות של G הצמודות ל- H .

4. (א) הוכח שהתמורות $(123)(456)$ ו- (246) אינן צמודות ב- S_6 .

(ב) הראה שהתמורות $\sigma = (123)(456)$ ו- $\sigma' = (123)(654)$ צמודות ב- A_6 .

(ג) האם הן צמודות בתת-החבורה $\langle \sigma, \sigma' \rangle$ של S_6 ?

5. תהי G חבורה.

(א) לכל $x \in G$ נסמן ב- γ_x את הפונקציה $G \rightarrow G$ המוגדרת לפי $\gamma_x(y) = xyx^{-1}$. נניח שהמרפז $Z(G) = 1$ טריוויאלי. הוכח ש- $\Gamma: G \rightarrow S_G$ המוגדר לפי $\Gamma(x) = \gamma_x$ הוא שיכון (כלומר, הומומורפיזם חד-חד-ערכי).

(ב) נסמן ב- $c_x \in S_G$ את פעולת הכפל משמאל $c_x(y) = xy$. משפט קיילי קובע ש- $C: G \rightarrow S_G$ המוגדרת לפי $C(x) = c_x$ היא שיכון.

הוכח שתת-החבורות $\text{Im}(\Gamma)$ ו- $\text{Im}(C)$ של S_G מתחלפות איבר איבר אם ורק אם G אבלית.

6. בנה שדה מסדר 27.

הוכח שלכל איבר בשדה הזה יש שורש שלישי.

בהצלחה.

¹הערות: 1. (ב). תת-החבורה היא זו שאינה אבלית. 1. (ג). הומומורפיזם $G \rightarrow H$ הוא טריוויאלי אם כל האיברים של G נשלחים לאיבר היחידה של H . 2. (א). $A^2 = 2A = \{x + x : x \in A\}$, וכך ל- B^2 . 3. (ב). תת-חבורה של G צמודה ל- H אם היא מהצורה xHx^{-1} ל- $x \in G$. 4. (א). אם תרצו להשתמש במשפט, עליכם להוכיח אותו. 6. 'לבנות' פירושו לתת תאור קונקרטי, המאפשר לבצע חישובים; אין צורך לתת לוח כפל מלא של השדה. פירוש הטענה האחרונה הוא $\forall a \in F \exists b \in F : b^3 = a$.