מבנים אלגבריים 89-214

פרופ' ע. וישנה

מועד א', תשע"ב

פתרון

ענו על כל השאלות. השאלות השונות תקבלנה משקל: 25, 20, 20, 15, 10, 10 נקודות, מן התשובה הטובה ביותר לפחות טובה.
סמנו באופן ברור בראש כל עמוד לאיזו שאלה הוא מתייחס. אל תפתרו סעיפים משאלות שונות באותו עמוד.
משך המבחן. שלוש שעות (לא תנתן הארכה).

1. (א) תן דוגמא נגדית ל"משפט לגרנז' של המונוידים" (הטוען, כביכול, שהסדר של מונויד סופי מתחלק בסדר של כל תת־מונויד שלו). **פתרון**. לכל ראשוני p, למשל $p = 7$, המונויד הכפלי $(\mathbb{Z}_p, \cdot, 1)$ שסדרו p מכיל את חבורת אוילר U_p שסדרה, $p-1$, אינו מחלק את p. דוגמא נוספת: לכל $n \leq m$ $(\{0,1,\dots,n-1\},\max,0)$ הוא תת־מונויד של $(\{0,1,\dots,m-1\},\max,0)$, גם אם n אינו מחלק את m (מה משתבש בדוגמא זו אם מחליפים את פעולת המקסימום במינימום?). **הערה**. $(\mathbb{Z}_3, \cdot, 1)$ אינו תת־מונויד של $(\mathbb{Z}_4, \cdot, 1)$. מונואיד אינו "קבוצה שבה לא לכל איבר יש הפכי". הקבוצה $\{1,3,5,7\}$ אינה "סגורה לחיבור מודולו 8", כפי ש־$\{0,1,2,3\}$ אינה "סגורה לכפל מודולו 6".

   (ב) הסבר בקיצור נמרץ (עד שתי שורות) היכן נכשלת ההוכחה של משפט לגרנז' עבור מונוידים. **פתרון**. משפט לגרנז' נובע מכך שהחבורה היא איחוד זר של הקוסטים השונים של תת־החבורה, שכולם באותו גודל. במונויד לשני קוסטים שונים של תת־מונויד H יכול להיות איבר משותף; וקוסטים יכולים להיות בעלי סדר שונה כי הפונקציה $H \to Ha$ המוגדרת על־ידי $h \mapsto ha$ אינה מוכרחה להיות חד־חד־ערכית כאשר a אינו הפיך.

2. (א) תהי H תת־חבורה של חבורה G. הגדר את המרכֵּז $\mathrm{C}_G(H)$ והמנרמל $\mathrm{N}_G(H)$.

   (ב) הוכח ש־$\mathrm{C}_G(H) \lhd \mathrm{N}_G(H)$. **פתרון**. יהיו $g \in \mathrm{N}_G(H)$ ו־$x \in \mathrm{C}_G(H)$. כדי להוכיח ש־$gxg^{-1} \in \mathrm{C}_G(H)$, יהי $h \in H$, אז $(gxg^{-1})h(gxg^{-1})^{-1} = gx(g^{-1}hg)x^{-1}g^{-1} = g(g^{-1}hg)g^{-1} = h$ מכיוון ש־$g^{-1}hg \in \mathrm{N}_G(H)$; לכן gxg^{-1} מתחלף עם כל איבר של H.

3. (א) כמה הומומורפיזמים יש מ־$\mathbb{Z}_{12}$ ל־S_5? **פתרון**. הומומורפיזם $\phi : \mathbb{Z}_{12} \to S_5$ נקבע על־ידי התמונה $\phi(1) \in S_5$ של היוצר 1; וכדי שיהיה מוגדר היטב נדרש $\phi(1)^{12} = \phi(12) = \phi(0) = \mathrm{id}$. ב־$S_5$ יש רק מחלקה אחת שבה אברים מסדר שאינו מחלק את 12, היינו המחלקה של (12345), שיש בה 24 אברים. לכן יש $96 = 120 - 24$ הומומורפיזמים שונים. **הערה**. רבים הבחינו שאפשר ליצור את $\mathbb{Z}_{12}$ על־ידי ארבעה אברים; אין לזה שום השפעה על התשובה: הומומורפיזם נקבע על־ידי התמונה של כל אחד ואחד מהיוצרים, ואלו קובעות כמובן זו את זו.

   (ב) וכמה מ־S_5 ל־$\mathbb{Z}_{12}$? **פתרון**. אם $\phi : S_5 \to \mathbb{Z}_{12}$ הומומורפיזם אז הוא משרה איזומורפיזם $S_5/\operatorname{Ker}(\phi) \cong \operatorname{Im}(\phi) \leq \mathbb{Z}_{12}$, כאשר $\operatorname{Ker}(\phi) \lhd S_5$ ולכן $\operatorname{Ker}(\phi) = 1, A_5, S_5$. המקרה הראשון בלתי אפשרי כי S_5 גדולה מכדי להיות תת־חבורה של $\mathbb{Z}_{12}$. במקרה השני האיבר הלא־טריוויאלי של S_5/A_5, שהוא מסדר 2, צריך לעבור לאיבר היחיד מסדר 2 ב־$\mathbb{Z}_{12}$, היינו 6, ואז $\sigma \mapsto 3(1 - \operatorname{sgn}(\sigma))$. במקרה האחרון ההומומורפיזם טריוויאלי. לכן יש שני הומומורפיזמים: הטריוויאלי ותיקון של העתקת הסימן. פתרון נוסף: כידוע S_5 נוצרת על־ידי החילופים, שכולם צמודים זה לזה. לכן גם התמונות שלהם צמודות זו לזו, וכולן שוות כי $\mathbb{Z}_{12}$ אבלית. מכיוון שתמונתו של איבר מסדר 2 צריכה להיות מסדר 1 או 2, יש שני הומומורפיזמים: הטריוויאלי, וזה השולח את כל החילופים ל־6, שהוא מוגדר היטב כי הוא מתקבל מההרכבה $S_5 \to S_5/A_5 \cong \mathbb{Z}_2 \cong 6\mathbb{Z}_{12} \hookrightarrow \mathbb{Z}_{12}$.

4. תהי G חבורה עם תת־חבורה H מאינדקס n. הוכח שקיים הומומורפיזם $\Phi : G \to S_n$ שהגרעין שלו מוכל ב־H. **פתרון**. נגדיר הומומורפיזם $\Phi : G \to S_{G/H}$ לפי $\Phi(g) = \phi_g$, כאשר $\phi_g : G/H \to G/H$ היא הפונקציה $\phi_g(xH) = gxH$. הפונקציה אינה תלויה בנציג של הקוסט משום שהיא מכפילה את הקוסט כולו באיבר g. מכיוון ש־$\phi_{gg'} = \phi_g\phi_{g'}$, כל הפונקציות ϕ_g הן הפיכות, ולכן Φ מוגדר היטב. מאותה סיבה גם $\Phi(gg') = \Phi(g)\Phi(g')$, כך ש־$\Phi$ הומומורפיזם. כעת, אם $g \in \operatorname{Ker}(\Phi)$ אז $\phi_g(H) = gH = H$ ולכן $g \in H$; אם כך $\operatorname{Ker}(\Phi) \subseteq H$. **הערה**. חיתוך הצמודים $\operatorname{Ker}(\Phi) = \cap gHg^{-1}$ נקרא ה**ליבה** של H בתוך G. **עוד הערה**. אנא המנעו מהגדרות כמו "$\phi_{g'}(gH) = Hg$", שצריך הרבה רצון טוב כדי להמשיך לבדוק אחריהן את שאר השאלה.

5. (א) כמה חבורות אבליות יש מסדר $2^8 3^6$ ואקספוננט $2^4 3^3$? **פתרון**. כל חבורה אבלית ניתנת לפירוק פרימרי יחיד, ולכן התשובה היא: מספר החבורות האבליות מסדר 2^8 מאקספוננט 2^4, כפול מספר החבורות האבליות

מסדר 3^6 מאקספוננט 3^3. יש 5 חבורות מהסוג הראשון ($\mathbb{Z}_{16}$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$) ו־3 מהסוג השני ($\mathbb{Z}_{27}$, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_9$, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$), ולכן התשובה היא 15.

(ב) עבור החבורה $A = \mathbb{Z}_{36} \times \mathbb{Z}_{96} \times \mathbb{Z}_{108}$, כתוב את הצורה הקנונית של $18A$ ושל $A/18A$. **פתרון**. מכיוון ש־$m\mathbb{Z}_n = (m,n)\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{n/(n,m)}$,

$$18A = 18\mathbb{Z}_{36} \times 6\mathbb{Z}_{96} \times 18\mathbb{Z}_{108} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{16} \times \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{48},$$

ולכן

$$\begin{aligned} A/18A &\cong (\mathbb{Z}_{36} \times \mathbb{Z}_{96} \times \mathbb{Z}_{108})/(18\mathbb{Z}_{36} \times 6\mathbb{Z}_{96} \times 18\mathbb{Z}_{108}) \\ &\cong (\mathbb{Z}_{36}/18\mathbb{Z}_{36}) \times (\mathbb{Z}_{96}/6\mathbb{Z}_{96}) \times (\mathbb{Z}_{108}/18\mathbb{Z}_{108}) \\ &\cong \mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{18}, \end{aligned}$$

וזו צורה קנונית לאחר סידור הרכיבים. **הערה**. שימו לב שחבורת מנה *אינה מוגדרת* באמצעות טיפוסי איזומורפיזמים. כלומר, לא די לדעת "למה איזומורפית A ולמה איזומורפית B" כדי לחשב את המנה A/B. המנה מוגדרת רק כאשר B היא תת־חבורה של A.

6. הפולינום x^4+x+1 אי־פריק מעל $\mathbb{Z}_2$, ולכן

$$K = \mathbb{Z}_2[x]/\mathbb{Z}_2[x](x^4+x+1) = \left\{a + b\bar{x} + c\bar{x}^2 + d\bar{x}^3 :\ a,b,c,d \in \mathbb{Z}_2\right\}$$

הוא שדה, מסדר 16. כתוב את ארבעת האברים של תת־השדה מסדר 4 של K. **פתרון**. כל איבר בשדה מסדר 4 הוא שורש של הפולינום $t^4 - t = t(t-1)(t^2+t+1)$. השורשים $0,1$ נמצאים בתת־השדה, ומלבדם שייכים אליו גם השורשים של המשוואה $t^2+t+1=0$. נכתוב $t = a+bx+cx^2+dx^3$, אז מכיוון שהעלאה בריבוע שומרת חיבור, ומכיוון ש־$e^2 = e$ לכל $e \in \mathbb{Z}_2$, $t^2+t+1 = a+bx^2+cx^4+dx^6+a+bx+cx^2+dx^3+1 = a+bx^2+c(x+1)+d(x^3+x^2)+a+bx+cx^2+dx^3+1 = (c+1)+(b+c)x+(b+c+d)x^2$, וזה שווה לאפס כאשר $b=c=1$ ו־$d=0$, כלומר עבור האברים x^2+x, x^2+x+1. לכן תת־השדה המבוקש הוא $K_0 = \left\{0,1,x^2+x,x^2+x+1\right\}$.