

מבנים אלגבריים 89-214

פרופ' ע. וישנה

מועד א', תשע"ב

ענו על כל השאלות. השאלות השונות תקבלנה משקל: 25, 20, 20, 15, 10, 10 נקודות, מן התשובה הטובה ביותר לפחות טובה.

סמנו באופן ברור בראש כל עמוד לאיזו שאלה הוא מתייחס. אל תפתרו סעיפים משאלות שונות באותו עמוד. **משך המבחן.** שלוש שעות (לא תנתן הארכה).

1. (א) תן דוגמא נגדית ל"משפט לגרנז' של המונוידים" (הטוען, כביכול, שהסדר של מונויד סופי מתחלק בסדר של כל תת-מונויד שלו).

(ב) הסבר בקיצור נמרץ (עד שתי שורות) היכן נכשלת ההוכחה של משפט לגרנז' עבור מונוידים.¹

2. (א) תהי H תת-חבורה של חבורה G . הגדר את המרכז $C_G(H)$ והמנרמל $N_G(H)$.

(ב) הוכח ש- $C_G(H) \triangleleft N_G(H)$.

3. (א) כמה הומומורפיזמים יש מ- \mathbb{Z}_{12} ל- S_5 ?

(ב) וכמה מ- S_5 ל- \mathbb{Z}_{12} ?

4. תהי G חבורה עם תת-חבורה H מאינדקס n . הוכח שקיים הומומורפיזם $\Phi: G \rightarrow S_n$ שהגרעין שלו מוכל ב- $H^{(2)}$.

5. (א) כמה חבורות אבליות³ יש מסדר $2^8 3^6$ ואקספוננט $2^4 3^3$?

(ב) עבור החבורה $A = \mathbb{Z}_{36} \times \mathbb{Z}_{96} \times \mathbb{Z}_{108}$, כתוב את הצורה הקנונית⁴ של $18A$ (5) ושל $A/18A$.

6. הפולינום $x^4 + x + 1$ אי-פריק מעל \mathbb{Z}_2 , ולכן

$$K = \mathbb{Z}_2[x]/\mathbb{Z}_2[x](x^4 + x + 1) = \{a + b\bar{x} + c\bar{x}^2 + d\bar{x}^3 : a, b, c, d \in \mathbb{Z}_2\}$$

הוא שדה⁶, מסדר 16. כתוב את ארבעת האברים של תת-השדה מסדר 4 של K .

בהצלחה.

¹העדיפו תשובה בסגנון "המכונית אינה נוסעת משום שנגמר לה הדלק" על-פני תשובה כמו "המכונית אינה נוסעת".
²זהו "העידון של משפט קיילי". רמז: קבוצת הקוסטים של H ב- G , שמסמנים ב- G/H למרות שאינה בהכרח חבורה, היא בת n אברים.

³שונות עד כדי איזומורפיזם, כמובן
⁴הצורה הקנונית של חבורה אבלית היא הצגתה כסכום ישר של חבורות ציקליות שהסדרים שלהן מקיימים תכונה מסוימת
⁵ $18A = \{18x : x \in A\}$, כאשר $18x = \underbrace{x + \dots + x}_{18 \text{ פעמים}}$, סכום חוזר 18 פעמים.

⁶כאן \bar{x} הוא הקוסט $x + \mathbb{Z}_2[x](x^4 + x + 1)$ של K