

מבנים אלגבריים 89-214

פרופ' ע. וישנה

מועד ב', תשע"ב

ענו על כל השאלות. השאלות השונות תקבלנה משקל: 25, 20, 20, 15, 10, 10 נקודות, מן התשובה הטובה ביותר לפחות טובה.

סמנו באופן ברור בראש כל עמוד לאיזו שאלה הוא מתייחס. אל תפתרו סעיפים משאלות שונות באותו עמוד. **משך המבחן.** שלוש שעות (לא תנתן הארכה).

1. תן דוגמא (עם הוכחה מלאה) למונויד שאינו ניתן לשיכון¹ בחבורה.
2. (א) נסח את משפט קושי (העוסק בחבורה G ומספר p).
(ב) בחר אחת משתי השאלות הבאות:
 - i. כתוב הוכחה קצרה, אך מלאה ומדוייקת, של המשפט.
 - ii. כדי להוכיח את המשפט, בנינו קבוצה $X \subseteq G \times G \times \dots \times G$. תאר את הקבוצה וציין כמה תכונות שלה המשתלבות יחד להוכחה של המשפט.
3. תהינה G חבורה, ו- A חבורה אבלית. הוכח שלכל הומומורפיזם $f: G \rightarrow A$ יש הומומורפיזמים $\theta: G \rightarrow G/G'$ ו- $g: G/G' \rightarrow A$ כך ש- $f = g \circ \theta$ (²).
4. (א) מצא את כל מחלקות השקילות של אברים מסדר 6 בחבורה S_8 . כמה אברים בכל מחלקה?
(ב) ענה על אותה שאלה בחבורה A_8 .
5. מצא איזומורפיזם מפורש³ מ- $\mathbb{Z}_{55} \times \mathbb{Z}_{77}$ ל- $\mathbb{Z}_{385} \times \mathbb{Z}_{11}$.
6. יהי F שדה מסדר 27. מצא את הצורה הקנונית של החבורות $(F, +, 0)$ ו- $(F - \{0\}, \cdot, 1)$.

בהצלחה.

¹שיכון של מונויד בחבורה: פונקציה חד-חד-ערכית ושומרת כפל מן המונויד לחבורה. מונויד M הוא 'ניתן לשיכון' אם יש חבורה G ושיכון $M \rightarrow G$, ו'אינו ניתן לשיכון' אם אין חבורה כזו.

²כידוע G' היא תת-חבורת הקומוטטורים של G , הנוצרת על-ידי כל הקומוטטורים $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$.

³תן נוסחה לחישוב $\phi(x)$ לכל $x \in A$