מבנים אלגבריים, 89-214

פרופ' ע. וישנה

שאלות לתרגול עצמי, לכבוד חנוכה תשע"ב

1. להלן מספר טענות על תת־חבורות $A,B \le G$. קבע את יחסי הגרירה הלוגיים ביניהן.
   (א) $AB \le G$ ו־$A \lhd AB$.
   (ב) $AB \le G$ ו־$B \lhd AB$.
   (ג) $AB \le G$, $A \lhd AB$ ו־AB/A אבלית.
   (ד) AB היא תת־חבורה של G.
   (ה) לכל $a \in A$, $aB = Ba$.
   (ו) לכל $a \in A$ ולכל $b \in B$, $ab = ba$.
   (ז) לכל $a \in A$ ולכל $b \in B$ קיים $b' \in B$ כך ש־$aba^{-1} = b'$.
   (ח) $[A,B] = 1$ (ראו ההגדרה להלן).
   (ט) $\forall a \in A, \forall b \in B, \exists a' \in A : \exists b' \in B : ab = b'a'$.
   (י) $\forall a \in A, \exists a' \in A : \forall b \in B, \exists b' \in B : ab = b'a'$.
   (יא) $\exists a \in A : \forall a' \in A, \forall b \in B, \exists b' \in B : ab = b'a'$.
   (יב) $\exists a \in A : \exists b \in B : \forall a' \in A : \forall b' \in B : ab = b'a'$.
   (יג) $A \lhd G$.
   (יד) $A, B \lhd G$.
   (טו) $AB \lhd G$.
   (טז) $A \subseteq \mathrm{C}_G(B)$.
   (יז) $A \subseteq B$.
   (יח) A, B אבליות.
   (יט) $A \subseteq \mathrm{Z}(G)$.

2. הוכח שהומומורפיזם מחבורה G נקבע על־ידי תמונות היוצרים.
   כלומר, אם $G = \langle g_1, \dots, g_m \rangle$ ו־H חבורה כלשהי, ו־$\phi, \phi' : G \to H$ הומומורפיזמים המקיימים $\phi(g_i) = \phi'(g_i)$ לכל $i = 1, \dots, m$, אז $\phi = \phi'$.

3. תהיינה A, B תת־חבורות נורמליות של חבורה G. הוכח שהמכפלה AB והחיתוך $A \cap B$ הן תת־חבורות נורמליות (אין צורך להוכיח שהן תת־חבורות).

4. אם $A, B \le G$ הן תת־חבורות שהסדרים שלהן זרים, אז $A \cap B = 1$.

5. הוכח שמספר הקוסטים הימניים של תת־חבורה H שווה למספר הקוסטים השמאליים שלה (הנח שאחד המספרים האלה סופי, אבל לא שהחבורות סופיות).

6. בחבורה G מתקיימים לכל $a, b \in G$ היחסים $(ab)^7 = a^7 b^7$ ו־$(ab)^5 = a^5 b^5$. הוכח שהחבורה אבלית.

7. תהיינה $A, B \subseteq G$ תת־חבורות. נסמן ב־$[A,B]$ את תת־החבורה של G הנוצרת על־ידי כל האברים $[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$, $a \in A$, $b \in B$.
   הוכח שאם A, B נורמליות, אז $[A,B]$ היא תת־חבורה נורמלית של G, ו־$[A,B] \subseteq A \cap B$.

8. תהי H תת־חבורה של חבורה G. אז $H \cdot \mathrm{C}_G(H)$ היא חבורה, H תת־חבורה נורמלית שלה, $\mathrm{Z}(H) \subseteq \mathrm{C}_G(H)$ ו־$\mathrm{C}_H(H)H/H \cong \mathrm{C}_G(H)/\mathrm{Z}(H)$.

9. יהי $g \in G$. הוכח שהפונקציה $\gamma_g : G \to G$ המוגדרת על־ידי $\gamma_g(x) = gxg^{-1}$ היא הומומורפיזם. הוכח ש־$\gamma_g \gamma_h = \gamma_{gh}$, והסק ש־$\gamma_g$ חד־חד־ערכית ועל. מצא מתי $\gamma_g = \mathrm{id}_G$.