

הסתברות כללית למדעי המחשב, 89-262

פרופ' מ. שפס וד"ר ע. וישנה
סמסטר א', מועד ב', תשס"ח

יש לענות על 5 מתוך 7 השאלות.
משך המבחן: שעתיים וחצי (לאחר הארכה).
חומר מותר בשימוש: דף עזר (מצורף).

1. לאב-הבית יש שני צרורות מפתחות: באחד ארבעה מפתחות לחדרים ושניים לארון השירות, ובשני שלושה מפתחות לחדרים, ומפתח כללי אחד (הפותח כל דלת בבנין). הוא בוחר צרור מפתחות באקראי, וממנו בוחר מפתח באקראי. המפתח מתאים לארון השירות. מה הסיכוי שהוא בחר את הצרור הראשון?

2. בכד יש N כדורים, שמתוכם A שחורים והשאר לבנים. הכדורים השחורים גדולים מעט יותר, וכך הסיכוי להוציא כל כדור שחור כפול מזה של כל כדור לבן. מוציאים $A \geq a$ כדורים בזה אחר זה. חשב את הסיכוי לכך שכולם שחורים.

3. חשב את התוחלת של $X(X-1)(X-2)$ כאשר X מתפלג פואסונית, $P(\lambda)$.

4. משך החיים של נורה מסויימת מתפלג מעריכית, עם תוחלת של 100 שעות. בביקורת שנערכה לאחר 100 שעות מהדלקת הנורה, נמצא שזו כבר אינה פועלת. מהי תוחלת הזמן שבו פעלה הנורה עד שכבתה?

5. (א) הסיכוי שנורה שנקנתה בחנות היא פגומה שווה ל-0.02. המשתנה המקרי X סופר כמה נורות יש לקנות בחנות עד שנתקלים בנורה פגומה. חשב את החסם המתקבל מהפעלת אי-שוויון צ'ביצ'ב על הסיכוי $P(X \leq 400)$, והשווה אותו לערך האמיתי.

(ב) למשתנה מקרי חיובי Y יש מומנט שלישי 8. תן חסם לא טריוויאלי לסיכוי ש- $P(Y^2 \geq 36)$. [רמז: הפעל את אי-שוויון מרקוב על המשתנה Y^3].

6. זמן ההמתנה לאוטובוס בתחנה מתפלג התפלגות אחידה, בין 0 ל-60 דקות. מה הסיכויים לכך שזמן ההמתנה הממוצע ב-100 ימים שונים יהיה בין 32 ל-34 דקות?

7. המן וזָרֶש משחקים סדרת משחקים. בכל משחק, המפסיד מעביר למנצח משלוח-מנות אחד, והסדרה מסתיימת כשמאגר המשלוחים של אחד השחקנים מתרוקן. הסיכוי של זרש לנצח בכל משחק כפול מזה של המן, אלא שבתחילת הסדרה, לו יש שני משלוחים, ולה רק אחד. חשב את הסיכוי של זרש לרוקן את מאגר המשלוחים של המן.

בהצלחה.

דף עזר

הסתברות כללית למדעי המחשב, 89-262.

נתונים על התפלגויות בדידות.

$P(X = k)$	$E(X)$	$V(X)$
$q + (p - q)k$	p	pq
$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	np	npq
$q^{n-1} p$	$1/p$	q/p
$\frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$	λ	λ
$\frac{\binom{A}{k} \binom{B}{n-k}}{\binom{A+B}{n}}$	$\frac{An}{A+B}$	$\frac{AB(A+B-n)n}{(A+B)^2(A+B-1)}$

נתונים על התפלגויות רציפות.

$f_X(t)$	$E(X)$	$V(X)$
$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$\frac{1}{\theta} e^{-t/\theta}$	θ	θ^2
$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2
$\frac{x^{n/2-1} e^{-x/2}}{2^{n/2} \Gamma(n/2)}$	n	$2n$
$\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{\pi n} \Gamma(n/2)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}$	0	$\frac{n}{n-2}$

ההתפלגות הנורמלית:

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990