

הסתברות כללית למדעי המחשב, 89-262

פרופ' ע. וישנה

סמסטר א', מועד א', תשס"ט

יש לענות על ארבע מתוך שש השאלות. חובה לסמן באופן ברור איזה סעיף של איזו שאלה פותרים בכל עמוד, ולהקיף במסגרת את התשובה הסופית בכל סעיף. משך המבחן: שעתיים וחצי (לאחר הארכה). חומר מותר בשימוש: דף עזר (מצורף). מחשבון פשוט (לא סימבולי).

1. המנהל בתחנת הימורים מטיל שני מטבעות (כל המטבעות בשאלה הם הוגנים, ויש להם שני ערכים אפשריים: 0 או 1), ומסמן את התוצאות ב- S_0 ו- S_1 . אחר-כך הוא מטיל מטבע שלישי, Y . אם יצא $Y = 0$, הוא מציב $Z = W = 0$, ומפרסם את $X_0 = S_0$ ואת $X_1 = S_1$. אחרת, הוא מטיל שני מטבעות, Z ו- W , ומפרסם את $X_Z = W \cdot S_Z$ ואת $X_{1-Z} = S_{1-Z}$.

(א) חשב את התוחלת של X_0 .

(ב) האם הערכים של X_0 ו- X_1 תלויים או בלתי תלויים? הוכח.

(ג) מהו הסיכוי של המאורע $W = 1$, בהנתן ש- $Y = 1$?

(ד) חשב את ההתפלגות המשותפת של W ו- Z בהנתן ש- $X_1 = 1$.

2. יהי X משתנה מקרי רציף בעל התפלגות אחידה, $X \sim U[0, 1]$. נסמן $Y = \frac{1-X}{1+X}$.

(א) מהו תחום הערכים של Y יכול לקבל?

(ב) מה פונקציית הצפיפות של Y ? (במפורש: מצא את $f_Y(y)$. כתוב למשל את $f_Y(\frac{1}{2})$.)

(ג) חשב את התוחלת של Y .

3. מספר המלים החדשות שסופר ממציא בספר נתון מתפלג פואסונית, $X \sim P(4)$. כאשר הסופר ממציא n מלים חדשות, הסיכוי לכך שהספר טוב הוא $(\frac{2}{3})^n \cdot \frac{1}{6}$. נגדיר משתנה מקרי G : $G = 1$ אם הספר טוב, ו- $G = 0$ אחרת.

(א) נסמן את התוחלת של G ב- μ . חשב את $P(G = 1)$ במונחי μ .

(ב) חשב את μ (כמספר).

(ג) מצא את ההתפלגות של X בהנתן שהספר טוב.

(ד) מצא את התוחלת של X באותה הנחה, כלומר את $E(X|G = 1)$.

4. X_1, \dots, X_n הם משתנים אקראיים בלתי-תלויים, עם תוחלת 0 ושונות 1. מגדירים את סדרת הסכומים החלקיים $S_i = X_1 + \dots + X_i$, ואת הממוצע $T_n = \frac{S_1 + \dots + S_n}{n}$.

(א) חשב את השונות המשותפת $\text{Cov}(S_i, S_j)$ לכל i, j .

(ב) הוכח ש- $\Pr\{|X_1 + \dots + X_n| \geq n^{3/5}\} \rightarrow 0$ כאשר $n \rightarrow \infty$.

5. ידוע ש-20% מן הציבור תומכים במפלגת 'שלמת בטון ומלט'. סוקר א' דוגם באקראי 800 איש, ואילו סוקר ב' דוגם 1000 איש.

(א) מה הסיכוי שמספר התומכים במפלגה אצל הסוקר הראשון יעלה על 200?

(ב) מה הסיכוי לכך שמספר התומכים אצל הסוקר הראשון יעלה על מספרם אצל הסוקר השני?

6. מטילים מטבע הוגן בעל שני צדדים: 0 ו-1. מה תוחלת מספר המטבעות שיש להטיל עד שיופיע הראשון מבין שני הרצפים 110 ו-000 (משמאל לימין)?

בהצלחה.