

הסתברות כללית למדעי המחשב, 89-262

פרופ' ע. וישנה

סמסטר א', מועד ב', תשס"ט

יש לענות על ארבע מתוך שש השאלות. חובה לסמן באופן ברור איזה סעיף של איזו שאלה פותרים בכל עמוד, ולהקיף במסגרת את התשובה הסופית בכל סעיף. משך המבחן: שעתיים וחצי (לאחר הארכה). חומר מותר בשימוש: דף עזר (מצורף). מחשבון פשוט (לא סימבולי).

1. בכד יש שלושה כדורים, הממוספרים 1, 2 ו-3. מוציאים מן הכד שני כדורים בזה אחר זה, בלי החזרה. נסמן ב- X את המספר הקטן מבין השניים. אם $X = 1$ מחזירים את הכדור השני לכד. אחר-כך מוציאים מהכד כדור נוסף, שאותו מסמנים ב- Y .

(א) האם X ו- Y תלויים? הוכח.

(ב) חשב את התוחלת של Y .

(ג) חשב את הסיכוי ש- $X = 1$ אם $Y = 3$.

2. המשתנה X מתפלג אקספוננציאלית, $X \sim \text{Exp}(\theta)$, עם תוחלת $E(X) = \frac{1}{\theta}$. נסמן $Y = e^{-X}$.

(א) נניח ש- $\theta = 5$. כתוב את פונקציית הצפיפות של Y . באיזה תחום היא שונה מאפס?

(ב) בנתוני סעיף א', חשב את התוחלת של Y^{-1} .

(ג) כעת נניח ש- $\theta = 1$. מה התוחלת של $e^{-e^{-X}}$? (האם המספר הזה גדול מ- $\frac{2}{3}$?)

3. מהמר מנסה להגדיל את סיכויי הזכייה שלו ב"שיטת מרטינגייל". בתחילת המשחק הוא מניח לצידו 15 שקלים. הוא מספן בהימור שקל אחד; אם הפסיד, הוא מהמר על שני שקלים; אם הפסיד, הוא מהמר על ארבעה שקלים; אם הפסיד שוב, הוא מהמר על שמונה השקלים שנותרו לו. אם הצליח ולו באחד מן ההימורים שלו, הוא הרוויח באותו משחק שקל אחד. לעומת זאת, אם נכשל בארבעת ההימורים, המשחק הסתיים בהפסד של 15 שקלים. הסיכוי להצליח בכל הימור הוא $1/2$.

(א) מהי תוחלת הרווח בכל משחק?

(ב) מהי תוחלת מספר השקלים שהמהמר מספן בכל משחק?

(ג) חשב את הסיכוי של המהמר להרוויח, במליון משחקים, 1000 שקלים או יותר.

(ד) חשב את הסיכוי של מהמר קונוונציונלי, המסכן שקל אחד בכל פעם, להרוויח לפחות 1000 שקלים במליון משחקים.

4. נניח ש- X מתפלג גאומטרית, $X \sim G(\frac{2}{3})$. חשב את $E(2^X \cdot X)$ ואת $E(2^X \cdot X^2)$.

5. ידוע ש- $E(Y) = \int_0^\infty P(Y \geq t) dt$ לכל משתנה מקרי חיובי. יהי X משתנה מקרי חיובי, ויהי $0 < \epsilon < 1$. הוכח ש- $E(X^\epsilon) \leq 1 + \frac{\epsilon}{1-\epsilon} E(X)$. רמז: $\int_0^1 P(Y \geq t) dt \leq 1$

6. מטילים קוביה הוגנת. מה הסיכוי לכך שיופיע הרצף 56 לפני שהקוביה נופלת בפעם הראשונה על 1?

בהצלחה.