תחרות במתמטיקה
סיבוב שני - כ"ח באייר תשנ"א (12.5.1991)

<u>הנחיות למשתתפים</u>

להלן השאלות והניקוד שלהם.
אנא פתור כמה שאתה יכול במסגרת הזמן הקצוב (4 שעות).
אל תתיחס לעובדה שסכום הנקודות הוא גדול מ-100.

* * * * *

1. נתונה פונקציה רציפה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
האם קיימות פונקציות רציפות h ו- g כך שמתקיים $f(x)=h(x)\sin x+g(x)\cos x$
עבור כל $x \in \mathbb{R}$.

(10 נקודות)

2. נתונה מטריצה מסדר $n\times n$. $A=\left(a_{jk}\right)_{j,k=1}^{n} \quad \left(a_{jk}\in\mathbb{R}\right)$
הוכח שאם $tr(AX)=0$ עבור כל מטריצה X, $n\times n$ אז $A=0$.

(15 נקודות)

3. נתונים המספרים $C_0, C_1, ..., C_n \left(\in\mathbb{R}\right)$.
הוכח שאם $C_0+C_1/2+...+C_n/\left(n+1\right)=0$
אז למשוואה $C_0+C_1x+...+C_nx^n=0$ יש לפחות שורש ממשי אחד.

(15 נקודות)

4. מצא את כל הפונקציות הרציפות ב- $\mathbb{R}$ המקיימות את המשוואה הפונקציונלית $f\left(x+y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right)+xy\left(x+y\right)$ עבור כל $x,y\in\mathbb{R}$.

(20 נקודות)

5. נתונה פונקציה $f:\left[0,1\right]\to\left[0.1\right]$.
א. הוכח שאם f רציפה ב- $\left[0.1\right]$, אז יש נקודה $x_0\in\left[0.1\right]$ כך שמתקיים $f(x_0)=x_0$.
ב. הוכח שאם f עולה ב- $\left[0.1\right]$, אז קיים $x_0\in\left[0.1\right]$ כך שמתקיים $f(x_0)=x_0$ (אפילו אם f לא רציפה).
ג. תן דוגמא של $f:\left[0,1\right]\to\left[0.1\right]$ המקיימת $\forall x\in\left[0,1\right] \quad f(x)\neq x$.

(25 נקודות)

6. נניח $a_1=1$ ’ $a_2=1$ ו- $a_{n+2}=\left({a_{n+1}}^2+2\right)\big/a_n$.
הוכח ש- $a_n\in N \quad \forall n$.

(25 נקודות)

7. נתון מלבן המחולק ל- mn מלבנים קטנים (ראה ציור).
בתוך המלבנים הקטנים הנמצאים לאורך שפת המלבן ישנם מספרים ממשיים שונים (שמסומנים על ידי כוכביות ***).

יש למלא את המלבנים הפנימיים כך שכל מס׳ פנימי יהיה ממוצע חשבוני של 4 המספרים הסמוכים : משמאל, מימין, מלמעלה, מלמטה. ראה ציור.
הוכח שיש מילוי כזה והוא יחיד.

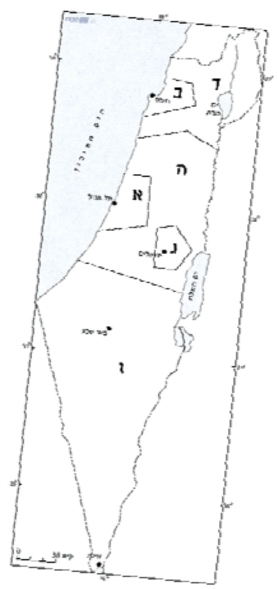
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*																					*
*																					*
*																					*
*																					*
*																					*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*

$$p=\left(a+b+c+d\right)/4$$

	d	
a	p	B
	c	

(25 נקודות)

8. ארץ ישראל מחולקת לששה אזורים שאינם נחתכים : א,ב,ג,ד,ה,ו. הכסא של רה״מ נמצא בנקודה R ($R \in$ ג). הגדר מטריקה $p\left(A,B\right)$ בין כל הנקודות A ו-B של ארץ ישראל, כך שעבור כל A $.\left(A \neq R\right)$



$$p\left(R,A\right)=\begin{cases} 1 & ,A\in \text{א} \quad \text{אם} \\ 2 & ,A\in \text{ב} \quad \text{אם} \\ 3 & ,A\in \text{ג} \quad \text{אם} \\ 4 & ,A\in \text{ד} \quad \text{אם} \\ 5 & ,A\in \text{ה} \quad \text{אם} \\ 6 & ,A\in \text{ו} \quad \text{אם} \end{cases}$$

(למשל המרחק בין נקודה כלשהיא A באוניברסיטת בר-אילן הנמצאת באזור א׳ לבין כסא רה״מ שווה 1).

(30 נקודות)

בהצלחה!