

תחרות במתמטיקה
סיבוב שני – כ"ח באייר תשנ"ב (31.5.1992)

1. הוכח כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < 1.25$.

(10 נקודות)

2. מצא את כל הפונקציות $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ כך שמתקיימים התנאים הבאים $f(x) \geq 0$, $f^{(4)}(x) \leq 0$, עבור כל $x \in \mathbb{R}$ ו- $f(31) = f(5) = 1992$.

(15 נקודות)

3. נתונה מטריצה מסדר 1992×1992 מעל השדה \mathbb{R} ונתון ש- $A^{5752} = A^{5753}$. הוכח כי

א. $A^{1992} = A^{1993}$
 ב. אם $A^{1991} \neq A^{1992}$ אזי A^{1992} .

(20 נקודות)

4. חשב את האינטגרל $\int_0^{n-1} \left\lfloor \frac{mx}{n} \right\rfloor dx$. כאשר n ו- m מספרים טבעיים זרים ו- $\lfloor y \rfloor$ הוא החלק השלם של y .

(15 נקודות)

5. מצא את התחום $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}$ כך שעבור כל $b \in \mathbb{D}$ השורשים z_1, z_2 של המשוואה $z^2 - bz + 2 = 0$ מקיימים את התנאים הבאים: $|z_1| < 1$, $|z_2| > 1$.

(20 נקודות)

6. מצא את כל הפונקציות f הרציפות על \mathbb{R} שמקיימות המשוואה $f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)dt$. עבור כל $x, y \in \mathbb{R}$.

(20 נקודות)

בהצלחה!