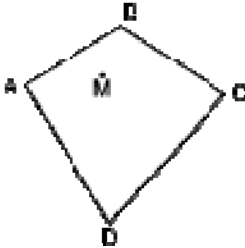


**תחרות במתמטיקה**  
**סיבוב שני - כ"ח באייר תשנ"ז (15.4.1997)**

1. האם קיימים מספרים טבעיים  $m < n$  כך שהמספר  $\sum_{k=m}^n \frac{1}{k}$  הוא שלם?  
 2. תהי  $f$  פונקציה אנליטית בעיגול  $\{z: |z| < 1\}$ . הוכח שאם  $\operatorname{Re} f'(z) > \operatorname{Im} f'(z)$  לכל  $z$  בעיגול אז  $f$  חד חד ערכית:  $z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$ .

3. תהי  $Q$  קבוצת המרובעים  $ABCD$  בעלי היקף  $|AB| + |BC| + |CD| + |DA| = 1$ . הוכח כי  $\sup_{q \in Q} \max_{M \in q} (|MA| + |MB| + |MC| + |MD|) = 3/2$ .



4. תהי  $x = (\mathbb{Q}, +)$  חבורת המספרים הרציונליים ביחס לפעולת החיבור, ותהי  $B$  סגורה ביחס לחילוק ב-1997. הוכח שאם  $A$  סגורה ביחס לחילוק ב-1997 אז גם  $B$  סגורה ביחס לחילוק ב-1997. האם טענה זו נכונה גם כאשר מחליפים את 1997 ב-5757 (התשנ"ז)?  
 5. עבור סדרה  $(x_n)$  של מספרים ממשיים נסמן:

$$S_n := \sum_{m=1}^n x_m, \quad P_n = \prod_{m=1}^n (1 + X_m), \quad \sigma_n = \sum_{m=1}^n x_m^2$$

- א. האם קיימת סדרה  $(x_n)$  כך ש-  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  ו-  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$  קיימים?  
 ב. האם קיימת סדרה  $(x_n)$  כך ש-  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n \neq 0$  ו-  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  קיים?  
 ג. הוכח שאם  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n < \infty$  אז מתקיים:  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P_n \neq 0$ .  
 6. א. מצא את הדטרמנטה (מסדר  $n \times n$ ):

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

- ב. האם קיימים מספרים  $a_{ij} \in \{1, 0, -1\}$  ( $1 \leq ij \leq 12$ ) כך ש-  $\det(a_{ij})_{i,j=1}^{12} = 1997$ ?