

תחרות בר-אילן במתמטיקה לסטודנטים (תשס"ה)

1. תהי פונקציה אינטגרבילית בעלת מחזור 2π המקיימת: $\int_0^{2\pi} \varphi(x) dx = 0$. הוכח

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(t) \varphi(nt) dt = 0 \quad \text{שכל פונקציה אינטגרבילית } f \text{ מתקיים:}$$

2. הוכח שארבעת הקדקודים של ריבוע אינם יכולים להמצא על ארבעה מעגלים בעלי מרכז משותף עם רדיוסים המהווים סדרה חשבונית.

3. מצא תנאי הכרחי ומספיק על המקדמים $b(x), a(x)$ של המשוואה $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ כך שיהיו לה שני פתרונות בלתי תלויים לינארית מהצורה $y = f(x)^2, y = f(x)$.

4. הוכח שאין פתרון שלם x למשוואה $x^4 + 4^x = p$ כאשר $p > 5$ ראשוני.

5. הוכח שעבור $a, b \geq 1$ מתקיים: $ab \leq e^{a-1} + b \ln b$.

6. הסדרה (x_n) מוגדרת באמצעות נוסחת הנסיגה $x_n = 0.5x_{n-1}^2 - 1$ ($n \geq 1$) כאשר $x_0 = 1/3$. האם הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ קיים? אם כן, מצא אותו.

7. מצא את כל הפונקציות $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימות $xf(y) - yf(x) = (x-y)f(x)f(y)$.

8. הוכח שאם $p_1, \dots, p_n \geq 0$ ולא כולם אפסים, אז לפולינום $z^n - p_1 z^{n-1} - \dots - p_{n-1} z - p_n$ יש שורש חיובי אחד בדיוק.

9. בקדקודי ריבוע רשומים, באופן ציקלי, מספרים שלמים a, b, c, d . נגדיר "צעד בסיסי" שבו הם מוחלפים במספרים $|d-a|, |c-d|, |b-c|, |a-b|$ בהתאמה. הוכח או הפרד: מכל מצב התחלתי נגיע, לאחר מספר סופי של צעדים, לרביעיית אפסים.

10. תהי $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ כאשר c, b, a הם מספרים ממשיים. מצא לאילו ערכים של

$$c, b, a \text{ קיים } n \text{ טבעי כך ש-} A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

בהצלחה!