

תחרות ארצית במתמטיקה לסטודנטים כ"א במרחשון, תשס"ה (5 נוב., 04)

1. מצא את כל הפונקציות הגזירות $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימות

$$f'((x+y)/2) = \frac{f(y) - f(x)}{y-x} \quad (\forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y)$$

2. תהינה A_1, A_2, \dots, A_n תת-קבוצות מדידות של הקטע $[0, 1]$ שסכום מידותיהן גדול מ- $n-1$:

$$\sum_{i=1}^n m(A_i) > n-1$$

הוכח שחיתוך כל הקבוצות הוא בעל מידה חיובית:

$$m\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) > 0$$

3. יהיו $a_0, a_1 > 0$. נגדיר:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{1 + a_n a_{n-1}} \quad (n \geq 1)$$

האם הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ קיים? אם כן, מצא אותו.

4. הפונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ מוגדרת וגזירה אינסוף פעמים, ומקיימת את התנאי

$$|f^{(n)}(x) - f^{(n-1)}(x)| < \frac{1}{n^2} \quad (\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geq 1)$$

הוכח שקיים קבוע ממשי c כך ש-:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(x) = ce^x \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

5. משולש חסום במעגל. יהי MN קטע אמצעים במשולש. הוכח שהנקודה הסימטרית למרכז המעגל ביחס לאמצע הקטע MN נמצאת על הגובה (במשולש) לצלע המקבילה לקטע MN .

6. יהיו $c_k = a_k + ib_k$ ($0 \leq k \leq n$) מספרים מרוכבים, כאשר a_k, b_k ממשיים. נתון שכל השורשים של הפולינום $R(z) = c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_n$ נמצאים מעל לישר הממשי ($\text{Im } z > 0$). הוכח: כל השורשים של הפולינומים $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$, $Q(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n$ הם ממשיים.

7. יהיו b, a שנים מארבעת שורשי הפולינום $x^4 + x^3 - 1$. הוכח: ab הוא שורש של הפולינום $x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1$.

8. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת ורציפה בקטע הסגור $[a, b]$, ומקיימת:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)^2$$

הוכח שקיימות שתי נקודות שונות $x_1, x_2 \in [a, b]$ המקיימות

$$f(x_1)f(x_2) = (b-a)^2$$

9. נתבונן באוסף כל המטריצות הסימטריות הממשיות מסדר 2×2 , $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$,

עם ערכים עצמיים נתונים λ_1, λ_2 . מצא את הערך המקסימלי והערך המינימלי האפשריים עבור b .

10. בתוך לוח משובץ בגודל $n \times n$ בוחרים באופן אקראי מלבן המורכב ממשבצות (עם צלעות מקבילות לצלעות הלוח). מה ההסתברות שהמלבן הוא בעצם ריבוע?