בס"ד

כ"א באייר תשס"ו
19 במאי, 06

תחרות בר-אילן במתמטיקה לסטודנטים תשס"ו

1. האם הסדרה הבאה מתכנסת? אם כן, חשב את הגבול שלה. נמק.

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_{n+1} = \left(1 - x_n\right)^2 \quad (n \ge 1)$$

2. הוכח שהביטוי

$$\frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}$$

הוא פולינום ממעלה n במשתנה x $(-1 < x < 1)$.

3. מצא את כל הפתרונות הגזירים של המשוואה

$$f(xy) = \frac{f(x)}{y} + \frac{f(y)}{x} \qquad (x, y > 0)$$

4. חשב את האינטגרל $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$.

5. הפונקציה $y = y(x)$ מקיימת את המשוואה

$$y'' = a(x) y \quad (x \ge 0)$$

כאשר $a(x) > 0$ בתחום הנ"ל, וכן את התנאים

$$y(0) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} y(x) = 0$$

הוכח כי $y(x) = 0$ עבור כל x.

6. האם קיים פתרון למשוואה המטריציאלית $X^2 + 4X = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 8 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

7. הוכח: במשולש שזויותיו α, β, γ מתקיים אי השוויון $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \frac{3}{2}$.

8. על פני הכדור בוחרים שתי נקודות אקראיות. מצא את ההסתברות שקשת המעגל הגדול (שמרכזה במרכז הכדור) המחברת את שתי הנקודות הנ"ל קטנה מ- α $\left(0 < \alpha < \pi\right)$.

9. יהיו $p_0 > p_1 > p_2 > \ldots > p_n > 0$. הוכח כי לפולינום

$$p(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots + p_n z^n$$

אין אפסים (מרוכבים) בעיגול הסגור $|z| \le 1$.

10. הוכח כי לכל פונקציה $f\left(x\right)$ הרציפה בקטע $\left[0,1\right]$ מתקיים השוויון

$$\lim_{n \to \infty} \left[\left(n+1\right) \int_0^1 f\left(x\right) x^n dx \right] = f\left(1\right)$$

בהצלחה!